04.1 Soit $n \geqslant 1$ et soit P un polynôme unitaire de degré n.
Déterminer le degré et le coefficient dominant des polynômes suivants :

1. $P_1 = (X^4 - 1)^3$
2. $P_2 = (X+1)^n - (X-1)^n$
3. $P_3 = P^2 - P + 1$
4. $P_4 = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}$

04.2 Trouver tous les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant

$$(X^2+1)P'' + P' + XP = X^3$$

04.3 Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de degré n. Montrer que :

1. P est une fonction paire $\iff \forall k \in \mathbb{N},\ a_{2k+1} = 0$
2. P est une fonction impaire $\iff \forall k \in \mathbb{N},\ a_{2k} = 0$

04.4 Effectuer la division euclidienne de $A(X)$ par $B(X)$ pour :

1. $A(X) = 3X^5 + 4X^2 + 1$ et $B(X) = X^2 + 2X + 3$
2. $A(X) = X^6 - 1$ et $B(X) = X^2 - 1$
3. $A(X) = X^2 - 3iX - 5(1+i)$ et $B(X) = X - 1 + i$
4. $A(X) = 4X^3 + X^2$ et $B(X) = X + 1 + i$

04.5 Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$:

$$3X^3 + 8X^2 + 3X - 2, \qquad 2X^3 + 3X + 5,$$

04.6 Chercher toutes les racines du polynôme P défini par :

$$P = X^5 - X^4 - 7X^3 + 7X^2 + 12X - 12$$

04.7 Déterminer $a \in \mathbb{C}$ pour que le polynôme $B = X^2 - aX + 1$ divise le polynôme $A = X^4 - X + a$.

04.8 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(X+1) = P(X)$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) = P(0)$
2. En déduire que P est constant.

04.9 Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$,

1. le polynôme $X^2 + X + 1$ divise le polynôme $(X+1)^{2n+1} + X^{n+2}$.
2. le polynome $X^2 + X$ divise le polynôme $(X+1)^{2n+1} - X^{2n+1} - 1$.

04.10 Vérifier que 2 est racine de $P = X^5 - 5X^4 + 7X^3 - 2X^2 + 4X - 8$. Préciser sa multiplicité. Factoriser alors P dans $\mathbb{R}[X]$.

04.11 Soit $P = X^4 + 2X^3 + 5X^2 + 4X + 6$.

1. Déterminer une racine imaginaire pure de P.
2. Trouver toutes les racines de P. En déduire sa factorisation dans $\mathbb{C}[X]$, puis $\mathbb{R}[X]$.

04.12 Décomposer en facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ les polynômes :

$$X^4 + X^2 + 1, \qquad (X^2 + X + 1)^2 + 1$$

04.13 On pose $P_0 = 1$, $P_1 = -2X$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$P_{n+2} = -2XP_{n+1} - 2(n+1)P_n$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est un polynôme de degré n.
2. Déterminer le coefficient dominant de P_n.
3. Déterminer une relation pour $x \in \mathbb{R}$ entre $P_n(x)$ et $P_n(-x)$.
   Qu'en déduire sur la fonction P_n ?