03.1 Déterminer la forme algébrique des complexes suivants :

1. $z_1 = \dfrac{1-3i}{1+3i}$
2. $z_2 = (i-\sqrt{2})^3$
3. $z_3 = \dfrac{1}{\dfrac{1}{i+1}-1}$
4. $z_4 = (j+1)^{2010}$

03.2 Soit $t \in \mathbb{R}$. Déterminer le module des complexes suivants, simplifié au maximum :

$$z_1 = t^2 + 2it - 1, \qquad z_2 = \frac{1+it}{1-it}$$

03.3 Mettre les complexes suivants sous forme trigonométrique. Donner le module et un argument.

1. $z_1 = 2-2i$
2. $z_2 = \dfrac{1}{\dfrac{i}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}}$
3. $z_3 = 1 + e^{i\theta}$
4. $z_4 = 1 - e^{i\theta}$

03.4 Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes :

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx), \qquad B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$$

$$C_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx), \qquad D_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx)$$

03.5 Résoudre les équations suivantes :

1. $(z+1)^2 + (2iz+3)^2 = 0$
2. $z^3 = i$
3. $z^6 + 64 = 0$
4. $e^z = 2+2i$

03.6 On note $\omega = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{7}\right)$ et on pose :

$$u = \omega + \omega^2 + \omega^4, \qquad v = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$$

Calculer $u+v$ et uv. En déduire u et v.

03.7 En utilisant la Formule de Moivre, exprimer $\cos(2x)$, $\cos(3x)$ et $\cos(5x)$ en fonction de $\cos(x)$.

03.8 Démontrer les formules :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$

$$\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\sin(a) + \sin(b) = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

03.9 Linéariser les expressions suivantes, i.e. les écrire en sommes de cosinus et de sinus (sans puissances) :

$$\sin^2(x), \quad \sin^6(x), \quad \sin^2(x)\cos^3(x)$$