02.1 Posons $E = \{1,2\}$. Déterminer $\mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$.
Faire de même pour $E = \{1,2,3\}$ et $E = \{\{1,2\}\}$.

02.2 Soit E un ensemble et A et B deux parties de E. Simplifier l'expression de $(A \cap^c B) \cup (A \cap B)$

02.3 Soient E, F, G, H quatre ensembles finis. Déterminer une formule donnant $Card(E \cup F \cup G \cup H)$ en fonction des cardinaux de E, F, G, H ainsi que de leurs intersections.
Généralisation : Soient $E_1, \ldots, E_n$ n ensembles finis. Déterminer une formule donnant $Card(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n)$.

02.4 A la cantine, on peut composer son propre menu. Il y a quatre entrées, trois plats principaux et quatre desserts possibles. Combien y a-t-il de menus possibles ?

02.5 On a trois livres de maths, six d'anglais et deux d'économie. Combien a-t-on de manières de ranger les livres sur une étagère ? Et si on regroupe les livres par matière ?

02.6 La classe de 813 comporte 14 garçons et 29 filles.

1. Combien y a-t-il de manières d'installer tous les élèves dans une salle comportant 50 places ?
2. Le professeur désigne au hasard deux élèves qui seront les délégués provisoires.
   Combien y a-t-il de choix possibles ? Parmi ces choix, combien y en a-t-il pour lesquels les deux élèves sont du même sexe ?

02.7 Dans une assemblée de n membres, on doit désigner un bureau de p membres, dont une personne doit être le président.

1. Combien peut-on désigner de bureaux différents (sans considérer le président) ?
2. On désigne d'abord le bureau, puis le président parmi le bureau. Combien y a-t-il de choix de bureau+président ?
3. On désigne d'abord le président, puis les personnes qui l'accompagnent dans le bureau. Combien y a-t-il de choix bureau+président ?
4. Démontrer que $p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$.

02.8 Quatre élèves ont oublié de mettre leur nom sur le DM qu'ils ont rendu, c'est pas bien malin. Le professeur leur rend leurs copies corrigées mais dans le désordre. Combien de distributions des quatre copies conduisent à ce qu'aucun élève ne se retrouve avec sa propre copie.

02.9 On dispose d'une encyclopédie en dix tomes numérotés de 1 à 10. De combien de manières peut-on ranger sur une étagère quatre de ces tomes avec des numéros ordonnés dans l'ordre croissant ?
Généralisation : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p < n$. Quel est le cardinal de l'ensemble $A = \{(i_1, \ldots, i_p) \in [\![1,n]\!]^p \ / \ 1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leqslant n\}$?

02.10 Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{2^k}{3^{n+1-k}}$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} 3^k$
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} 2^k$
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{3^{k-1}}$
6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{n-k}}{3^{k+1}}$

02.11 Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que pour $k > p$, $\binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}$.
En déduire que pour $n \geqslant p$, on a $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.
Application : Calculer $\displaystyle\sum_{k=4}^{20} k(k-1)(k-2)(k-3)$.

02.12 Montrer que pour $0 \leqslant k \leqslant n \leqslant N$, $\binom{n}{k}\binom{N}{n} = \binom{N}{k}\binom{N-k}{n-k}$.