Lycée des Sept Mares - Maurepas 2010-2011
TES1

QCM Dérivation - 25 Novembre 2010

NOM Prénom :

Une seule bonne réponse par question.
Bonne réponse = +1, Mauvaise réponse ou Pas de réponse = +0.

Questions	Réponses
1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $$f(x) = (2\sqrt{x}+1)^3.$$ Alors $f'(x) = \dots$:	☐ $\frac{1}{3\sqrt{x}}(2\sqrt{x}+1)^2$ ☐ $3\left(\sqrt{x}+2+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ ☐ $\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^3$ ☑ $\frac{3(2\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}}$
2. Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $$f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2}.$$ Alors $f'(x) = \dots$:	☐ $\frac{1}{2x\sqrt{x-1}}$ ☐ $\frac{-x^2+2}{x^4\sqrt{x-1}}$ ☐ $\frac{\sqrt{x-1}}{2x}$ ☑ $\frac{4-3x}{2x^3\sqrt{x-1}}$
3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ par $$f(x) = \frac{x-3}{4-2x}.$$ Alors $f'(x) = \dots$:	☐ $\frac{-4x+2}{(4-2x)^2}$ ☑ $\frac{-2}{(4-2x)^2}$ ☐ $\frac{10}{(4-2x)^2}$ ☐ $\frac{-4x-10}{(4-2x)^2}$
4. Soit f la fonction définie sur $]-\infty;2[$ par $$f(x) = \sqrt{\frac{1}{2-x}}.$$ Alors $f'(x) = \dots$:	☑ $\frac{\sqrt{2-x}}{2(2-x)^2}$ ☐ $\frac{-\sqrt{2-x}}{2(2-x)^2}$ ☐ $\frac{2\sqrt{2-x}}{(2-x)^2}$ ☐ $\frac{-2\sqrt{2-x}}{(2-x)^2}$
5. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $$f(x) = (2x^3-4x^2+2x)^3.$$ Alors $f'(x) = \dots$:	☐ $3(6x^2-8x+2)^3$ ☐ $(4x^2-16x+4)(2x^3-4x^2+2x)^2$ ☑ $3(6x^2-8x+2)(2x^3-4x^2+2x)^2$ ☐ $8(3x^2-4x+1)^3$

Questions	Réponses
1. Soit f la fonction définie sur $\left]-\infty;\frac{1}{4}\right[$ par $$f(x) = (x^2-3x)\sqrt{1-4x}.$$ Alors $f'(x) = \dots$:	☐ $\frac{-6x^2+8x-3}{\sqrt{1-4x}}$ ☐ $\frac{-10x^2+8x-3}{\sqrt{1-4x}}$ ☑ $\frac{-10x^2+20x-3}{\sqrt{1-4x}}$ ☐ $\frac{-6x^2+20x-3}{\sqrt{1-4x}}$
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $$f(x) = \frac{1}{(1-x)^3}.$$ Alors $f'(x) = \dots$:	☐ $\frac{-3}{(1-x)^4}$ ☐ $\frac{-3}{(1-x)^2}$ ☑ $\frac{3}{(1-x)^4}$ ☐ $\frac{3}{(1-x)^2}$
3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $$f(x) = x^4-2x^3+3x^2+1.$$ Alors l'équation de la tangente en $x=0$ est :	☐ $y=6x+1$ ☐ $y=6x-1$ ☑ $y=1$ ☐ $y=6x$
4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $$f(x) = \frac{1}{x^2}.$$ Alors l'équation de la tangente en $x=1$ est :	☐ $y=2x+3$ ☐ $y=2x-3$ ☑ $y=-2x+3$ ☐ $y=-2x-3$
5. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $$f(x) = x^3-3x^2-9x+27.$$ Alors les points pour lesquels les tangentes à $\mathcal{C}_f$ sont horizontales ont pour abscisses :	☐ 1 et -3 ☑ -1 et 3 ☐ 1 et 3 ☐ -1 et -3

Correction détaillée - Colonne de Gauche

1. $f(x) = (2\sqrt{x}+1)^3$. On remarque que $f(x)$ est du type $\boxed{(u(x))^3}$ avec $u(x) = 2\sqrt{x}+1$. Donc

$$f'(x) = \boxed{u'(x) \times \left(3(u(x))^2\right)}$$

On a $u(x) = 2\sqrt{x}+1$, donc $u'(x) = 2 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + 0 = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.
On a donc :

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \times 3(2\sqrt{x}+1)^2 = \boxed{\frac{3}{\sqrt{x}}\left(2\sqrt{x}+1\right)^2}$$

---

2. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2}$. On remarque que $f(x)$ est du type $\boxed{\dfrac{u(x)}{v(x)}}$ avec $u(x) = \sqrt{x-1}$ et $v(x) = x^2$. Donc

$$f'(x) = \boxed{\frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}}$$

On a $u(x) = \sqrt{x-1}$ du type $\sqrt{w(x)}$ avec $w(x) = x-1$, donc $u'(x) = w'(x)\dfrac{1}{2\sqrt{w(x)}} = 1 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$.
On a $v(x) = x^2$, donc $v'(x) = 2x$.
On a donc :

$$f'(x) = \frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} \times x^2 - \sqrt{x-1} \times 2x}{x^4} = \frac{\dfrac{x^2 - 2\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x-1} \times 2x\right)}{2\sqrt{x-1}}}{x^4} = \frac{x^2 - 4x(x-1)}{2\sqrt{x-1}} \times \frac{1}{x^4} = \frac{-3x^2+4x}{2x^4\sqrt{x-1}}$$

$$= \boxed{\frac{4-3x}{2x^3\sqrt{x-1}}}$$

---

3. $f(x) = \dfrac{x-3}{4-2x}$ est du type $\boxed{\dfrac{u(x)}{v(x)}}$ avec $u(x) = x-3$ et $v(x) = 4-2x$. Alors

$$f'(x) = \boxed{\frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}}$$

On a $u(x) = x-3$, donc $u'(x) = 1$. On a $v(x) = 4-2x$, donc $v'(x) = -2$.
Donc

$$f'(x) = \frac{(4-2x)-(x-3)(-2)}{(4-2x)^2} = \frac{4-2x+2(x-3)}{(4-2x)^2} = \boxed{\frac{-2}{(4-2x)^2}}$$

---

4. On a $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{2-x}}$. On remarque que $f(x) = \boxed{\sqrt{u(x)}}$ avec $u(x) = \dfrac{1}{2-x}$. Donc

$$f'(x) = \boxed{u'(x) \times \frac{1}{2\sqrt{u(x)}}}$$

On a $u(x) = \dfrac{1}{2-x}$, du type $\dfrac{1}{v(x)}$ avec $v(x) = 2-x$. Donc $u'(x) = \dfrac{-v'(x)}{v(x)^2}$ avec $v'(x) = -1$. On en déduit que $u'(x) = \dfrac{1}{(2-x)^2}$. Donc

$$f'(x) = \frac{1}{(2-x)^2} \times \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1}{2-x}}} = \boxed{\frac{\sqrt{2-x}}{2(2-x)^2}}$$

---

5. On a $f(x) = (4x^3-4x^2+2x)^3 = \boxed{(u(x))^3}$ avec $u(x) = 2x^3-4x^2+2x$. Donc $f'(x) = \boxed{3u'(x)(u(x))^2}$.
Ici $u'(x) = 6x^2-8x+2$, donc $f'(x) = \boxed{3(6x^2-8x+2)(4x^3-4x^2+2x)^2}$.

Correction détaillée - Colonne de Droite

1. $f(x) = (x^2 - 3x)\sqrt{1-4x} = \boxed{u(x)v(x)}$ avec $u(x) = x^2 - 3x$ et $v(x) = \sqrt{1-4x}$. Donc

$$f'(x) = \boxed{u'(x)v(x) + u(x)v'(x)}$$

On a $u(x) = x^2 - 3x$, donc $u'(x) = 2x - 3$.
On a $v(x) = \sqrt{1-4x} = \sqrt{w(x)}$ avec $w(x) = 1 - 4x$. Donc $v'(x) = w'(x) \times \dfrac{1}{2\sqrt{w(x)}}$ avec $w'(x) = -4$. Ainsi, $v'(x) = \dfrac{-4}{2\sqrt{1-4x}} = \dfrac{-2}{\sqrt{1-4x}}$.
Donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x-3)\sqrt{1-4x} + (x^2-3x) \times \left(\frac{-2}{\sqrt{1-4x}}\right) = \frac{(2x-3)(1-4x) - 2(x^2-3x)}{\sqrt{1-4x}} \\ &= \frac{2x - 8x^2 - 3 + 12x - 2x^2 + 6x}{\sqrt{1-4x}} = \boxed{\frac{-10x^2 + 20x - 3}{\sqrt{1-4x}}} \end{aligned}$$

---

2. $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^3} = \boxed{\dfrac{1}{u(x)}}$ avec $u(x) = (1-x)^3$. Donc

$$f'(x) = \boxed{\frac{-u'(x)}{(u(x))^2}}$$

On a $u(x) = (1-x)^3 = (v(x))^3$ avec $v(x) = 1 - x$. Donc $u'(x) = 3v'(x)v(x)^2 = 3 \times (-1) \times (1-x)^2$.
Ainsi

$$f'(x) = \frac{3(1-x)^2}{(1-x)^6} = \boxed{\frac{3}{(1-x)^4}}$$

---

3. $f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 1$. On a $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 6x$. L'équation de la tangente en $x = 0$ est

$$\boxed{y = f'(0)(x-0) + f(0)}$$

On calcule $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$. Donc la tangente a pour équation $\boxed{y = 1}$

---

4. $f(x) = \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{u(x)}$ avec $u(x) = x^2$. Donc $f'(x) = \dfrac{-u'(x)}{(u(x))^2} = \dfrac{-2x}{x^4} = \dfrac{-2}{x^3}$.
L'équation de la tangente en $x = 1$ est

$$\boxed{y = f'(1)(x-1) + f(1)}$$

On calcule $f(1) = 1$ et $f'(1) = -2$. Donc la tangente a pour équation $y = -2(x-1) + 1 = \boxed{-2x+3}$.

---

5. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 27$. Les points où la tangente à $\mathcal{C}_f$ est horizontale ont pour abscisses les x tels que $f'(x) = 0$.
Ici, $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3)$. On a $\Delta = 16$ et $x_1 = -1$ et $x_2 = 3$. Donc les points à tangente horizontale ont pour abscisse $\boxed{-1 \text{ et } 3}$.