

**01.1** Donner la négation des phrases suivantes :

1. Paul est un garçon et vit à Lyon.
2. Il pleut ou il vente.
3. A l'équation  $(E)$ , il existe une unique solution
4. S'il pleut, je prends mon parapluie
5. Si  $x$  est solution de l'équation  $(E)$ , alors  $x \in \mathbb{N}$
6. Pour tout élève de prépa, les maths sont un cauchemar.
7. Il existe un prof de maths qui ne fait pas de fautes d'orthographe.

**01.2** Traduire mathématiquement les phrases suivantes :

1. Il existe un réel strictement supérieur à son carré.
2. Il existe un entier compris entre  $\sqrt{3}$  et  $\sqrt{5}$ .
3.  $n$  est un entier pair.
4.  $n$  est un entier impair.
5.  $n$  est un multiple de 3.

**01.3** Entre les propriétés (a) et (b), mettre le bon signe entre " $\Rightarrow$ ", " $\Leftarrow$ " ou " $\Leftrightarrow$ ".

- |                           |                                |
|---------------------------|--------------------------------|
| (a) $n$ est multiple de 3 | (b) $n$ est multiple de 6      |
| (a) $\sqrt{x+2} \geq -1$  | (b) $x+2 \geq 1$               |
| (a) $\sqrt{x+2} \geq 2$   | (b) $x+2 \geq 4$               |
| (a) $x-3 = x^2 + 2x$      | (b) $e^{x-3} = e^{x^2} e^{2x}$ |
| (a) $\ln(x) = 0$          | (b) $x = 1$                    |

**01.4** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations et inéquations suivantes :

1.  $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = 1$ .
2.  $\sqrt{4x^2+1} = 2x-1$
3.  $\sqrt{x+3} - 4\sqrt{x-1} + \sqrt{x+8} - 6\sqrt{x-1} = 1$
4.  $\sqrt{x-2} \geq 4-x$

**01.5** Conjecturer puis démontrer une expression de  $u_n$  en fonction de  $n$  dans les cas suivants :

1.  $u_1 = 0$  et  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n}$
2.  $u_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = 10u_n - 9n - 8$
3.  $u_0 = 0$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = u_n + 2^n$

**01.6** Démontrer par récurrence les résultats suivants :

1.  $\forall n \geq 1$ ,  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$
2.  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $2^n \geq n+1$

**01.7** Soit  $(u_n)$  la suite définie par ces deux premiers termes  $u_0 = 4$  et  $u_1 = 8$  et par la relation :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+2} = 4u_{n+1} + 5u_n$ .

Montrer que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $u_n = 2 \times (-1)^n + 2 \times 5^n$ .

**01.8** Soit  $(u_n)$  la suite définie par ces deux premiers termes  $u_0 = 4$  et

$u_1 = \frac{7}{3}$  et par la relation :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+2} = \frac{7}{6}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$ .

Montrer que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $u_n = \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{2^{n+1}}{3^n}$ .

**01.9** Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = -2u_n + 4$ .

Déterminer une expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

**01.10** Soit  $(v_n)$  la suite définie par  $v_0 = 2$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $v_{n+1} = 3v_n + 4$ .

Déterminer une expression de  $v_n$  en fonction de  $n$ .

**01.11** Soit  $(u_n)$  définie par  $u_0 = -1/2$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \frac{2u_n}{3+u_n}$ .

On pose également  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$ .

Déterminer une expression de  $v_n$ , puis de  $u_n$  en fonction de  $n$ .