08.1 Déterminer la forme algébrique des complexes suivants :

1. $z_1 = (3+2i)(5+i) - (2-i)(1+i)$
2. $z_2 = \dfrac{1}{1+i} - 1$
3. $z_3 = i^n$ $(n \in \mathbb{N})$,
4. $z_4 = \dfrac{(2+i)^2}{1-3i}$
5. $z_5 = (i-\sqrt{2})^3$
6. $z_6 = \dfrac{1}{\dfrac{1}{i+1} - 1}$

08.2 Déterminer le module et un argument des complexes suivants :

1. $z_1 = 1+i$
2. $z_2 = 1-i$
3. $z_3 = 1+\sqrt{3}i$
4. $z_4 = -2$
5. $z_5 = -\sqrt{2}i$
6. $z_6 = (1+\sqrt{3}i)^5$

08.3 Soit $t \in \mathbb{R}$. Déterminer le module de $z_1 = t^2+2it-1$ et de $z_2 = \dfrac{1+it}{1-it}$, simplifiés au maximum.

08.4 Soit $\theta \in [0, 2\pi]$. Mettre les complexes $z_1 = e^{i\theta}+1$ et $z_2 = 1-e^{i\theta}$ sous forme trigonométrique.

08.5 Démontrer les formules suivantes pour tous réels a et b.

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$
$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$
$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$$

08.6 Démontrer les formules suivantes pour tous réels a et b.

$$\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$
$$\cos(a) - \cos(b) = -2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)$$
$$\sin(a) + \sin(b) = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)$$
$$\sin(a) - \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

08.7 En utilisant la Formule de Moivre, exprimer $\cos(2x)$, $\cos(3x)$ et $\cos(5x)$ en fonction de $\cos(x)$.

08.8 Linéariser : $\sin^2(x)$, $\cos^3(x)$, $\sin^4(x)$, $\sin^2(x)\cos^2(x)$.

08.9 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $\cos(2x) = 0$
2. $\sin(3x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
3. $\cos(x) \geqslant 0$
4. $\cos(x) = \sin(x)$
5. $\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$
6. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

08.10 Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes :

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx), \qquad B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$$
$$C_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx), \qquad D_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx)$$

08.11 Soit a un réel strictement positif. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes (donner les solutions sous forme algébrique et exponentielle) :

1. $z^2 = a$
2. $z^2 = -a$
3. $z^2 = ia$
4. $z^2 = -ia$
5. $z^2 = -a^2$
6. $z^2 = ia^2$

08.12 Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$:

1. $iz + 5i - 3 = (1-4i)z - 1$
2. $(iz+1)^2(2z-3i) = 0$
3. $z^2 + z + 1 = 0$
4. $z^2 = 8 - 6i$
5. $z^2 = 2 - 3i\sqrt{5}$
6. $iz^2 + (4i-3)z + i - 5 = 0$
7. $z^2 - (1+5i)z - 6 + 7i = 0$
8. $(z+1)^4 + (z+1)^2 + 1 = 0$
9. $z^3 = i$
10. $z^3 = 4\sqrt{2}(1-i)$
11. $z^6 + 64 = 0$
12. $e^z = 2 + 2i$
13. $(z-2)^n = (z+2)^n$ (avec $n \in \mathbb{N}$).
14. $(z+i)^n = (z-i)^n$ (avec $n \in \mathbb{N}$).

08.13 Déterminer sous forme algébrique les racines carrées de $\sqrt{3}+i$. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

08.14 On note $\omega = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{7}\right)$.
On pose $u = \omega + \omega^2 + \omega^4$ et $v = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$.
Calculer $u+v$ et uv. En déduire u et v.