04.1 Soient E, F et G trois ensembles non vides.
Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

1. Montrer que si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
2. Montrer que si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.

04.2 Soient E, F et G trois ensembles non vides.
Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

1. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
2. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
3. Montrer que si $g \circ f$ injective et f surjective, alors g injective.
4. Montrer que si $g \circ f$ surjective et g injective, alors f surjective.

04.3 Soient E et F non vides et soit $f : E \to F$ une application.

1. Montrer que f injective $\Longleftrightarrow \forall A \in \mathcal{P}(E),\ f^{-1}(f(A)) = A$
2. Montrer que f surjective $\Longleftrightarrow \forall B \in \mathcal{P}(F),\ f(f^{-1}(B)) = B$
3. Montrer que f injective $\Longleftrightarrow \forall A, B \in \mathcal{P}(E),\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

04.4 Pour chaque application suivante, pour tout y élément de l'ensemble d'arrivée, déterminer le nombre d'antécédent de y :

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x^2 + 3x + 4 \end{array}$
2. $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{1/2\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{4x+5}{6x-3} \end{array}$
3. $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \to & \mathbb{R} \setminus \{-1\} \\ x & \mapsto & \dfrac{1+x}{1-x} \end{array}$
4. $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (a,b) & \mapsto & (a+b, a-b) \end{array}$

04.5 Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1-e^x}{1+e^x}$.
Déterminer le domaine de définition D_f de la fonction f, puis montrer que f est impaire sur D_f.

04.6 La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, de période 1, et vérifie : pour tout réel x de $[0, 1[$, $f(x) = \ln(1 + x)$. Tracer la courbe représentative de la fonction f et déterminer l'expression de f sur l'intervalle $[-1, 0[$

04.7 Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array}$.

1. Déterminer si f est injective, surjective, bijective.
2. Montrer que g est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

04.8 Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \sqrt{2x^2 + 3x + 1}$
2. $g : x \mapsto \sqrt{\dfrac{2x+3}{x^2-5}}$
3. $h : x \mapsto \ln(\ln(|x|))$
4. $u : x \mapsto \ln^3(x)$
5. $v : x \mapsto \ln\left|\dfrac{x}{x^2-1}\right|$
6. $w : x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x}}$
7. $z : x \mapsto x\sqrt{-\ln(x)}$

04.9 Etudier les axes et centres de symétrie des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \frac{x^2 - 5x - 7}{x - 1}, f_2(x) = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}, f_3(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - x - 1}, f_4(x) = \frac{5x + 7}{3x - 2}$$

04.10 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f \circ f$ soit croissante sur $\mathbb{R}$ et $f \circ f \circ f$ soit strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
Montrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

04.11 Soit f définie sur $\mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) \leqslant 1 - \dfrac{1}{x^2}$.
Justifier que f est majorée sur $\mathbb{R}$.

04.12 Soit la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = -\dfrac{x}{1+x}$.

1. Sur $[0, +\infty[$ la fonction f admet-elle un maximum ? un minimum ?
2. Montrer que f est bornée sur $[0, +\infty[$. Déterminer ses bornes inférieures et supérieures.

04.13 Tracer les courbes représentatives des fonctions :

$$f(x) = \ln(x),\quad g(x) = \ln(x+1),\quad h(x) = \ln(x) + 1,\quad u(x) = -\ln(x)$$
$$v(x) = \ln(-x),\quad w(x) = |\ln(x)|,\quad y(x) = \ln(|x|)$$