02.1

1. Ecrire avec les pointillés les sommes suivantes :
$$S_n = \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{1+i}, \qquad T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{i}{1+k}, \qquad U_n = \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} a_{2k}$$
2. Calculer $A(n) = \sum_{k=n}^{2n} 1$. Combien vaut $A(2n)$?
3. On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k$.
   Calculer S_{2n} et S_{2n+1}.
4. Ecrire en $\sum$ la somme $(1+x) + (1+x)^2 + \cdots + (1+x)^n$.
5. Ecrire en $\sum$ la somme $\frac{1}{2} - \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} - \frac{4}{2^4} + \cdots$, la somme contenant $n+1$ termes.
6. Ecrire en $\prod$ le produit $n(n-1)\cdots(n-p+1)$ puis uniquement avec des factorielles.
7. Ecrire en $\prod$ le produit $2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2n$ puis uniquement avec des factorielles et puissances.
8. Ecrire en $\prod$ le produit $1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)$ puis uniquement avec des factorielles et puissances.

02.2 Calculer en fonction de n les sommes suivantes :
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right), \; T_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k} \right), \; U_n = \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+2) - \ln(k))$$

02.3 Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$.
On rappelle que $k = (k+1) - 1$ ...

02.4 Soient a et b deux réels. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a :
$$(a-b)\left(\sum_{k=1}^{n} a^{k-1} b^{n-k} \right) = a^n - b^n$$

02.5 Montrer par récurrence que :

1. $\forall n \geqslant 1, \; \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$
2. $\forall n \geqslant 1, \; \prod_{k=1}^{n} (n+k) = 2^n \prod_{k=1}^{n} (2k-1)$.

02.6 Calculer les sommes suivantes :

1. $\sum_{k=2}^{n} 2^k$
2. $\sum_{k=0}^{2n} 5^{-k}$
3. $\sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2^{3k-2}}$
4. $\sum_{k=0}^{n} (2k+1)$
5. $\sum_{k=0}^{n} \frac{3^{n+k}}{2^k}$
6. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$
7. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$
8. $\sum_{k=2}^{n} \frac{2+4^{n+k}}{2^k}$
9. $\sum_{k=1}^{n} k(k^2-2k)$
10. $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2$
11. $\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} 3^k$
12. $\sum_{k=0}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} 2^k$

02.7 Montrer que pour tous n et p tels que $0 \leqslant p \leqslant n$, on a la formule suivante : $\sum_{k=0}^{p} \binom{n-k}{p-k} = \binom{n+1}{p}$.

02.8 Soient n et p deux entiers tels que $1 \leqslant p \leqslant n-1$. Montrer que pour tout entier j tel que $0 \leqslant j \leqslant p$, on a : $\binom{n}{j}\binom{n-j}{p-j} = \binom{n}{p}\binom{p}{j}$.
En déduire la valeur de $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\binom{n-j}{p-j}$