16.1 Déterminer une primitive de :

1. $x \mapsto e^{-3x+5}$ sur $\mathbb{R}$.
2. $x \mapsto \tan x$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et $\left]\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right[$

16.2 Montrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ est une primitive de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

16.3 Existe-t-il des réels a et b tels que $F(x) = e^x(a\cos x + b\sin x)$ soit une primitive de la fonction $x \mapsto e^x \cos x$.

16.4 Déterminer la primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2(x-1)}$ définie sur $]1, +\infty[$ et qui s'annule en 3.

16.5 Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{1-t^2}dt$
2. $\displaystyle\int_1^2 \frac{3t+1}{t(t+1)}dt$
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(t-2)(t+3)}dt$
4. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t(t+1)(t+2)}dt$
5. $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{t^2}{t^2+4t-5}dt$
6. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{1+4t^2}dt$

16.6 Calculer les primitives des fonctions suivantes :

$x \mapsto e^x \cos x, \quad x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^n}, n \in \mathbb{N}, \quad x \mapsto x\mathrm{Arctan}(x), \quad (x^2+x+1)e^x$

16.7 Soit $I = \displaystyle\int_1^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\, dx$. Calculer I en posant $u = \sqrt{e^x - 1}$.

16.8 Calculer $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dt}{\sin t}$ à l'aide de $u = \cos t$.

16.9 Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{dt}{\cos t}$ à l'aide de $x = \sin t$.

16.10 Calculer $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{\cos x \sin x}dx$. On posera $u = \sin x$.

16.11 Calculer $\displaystyle\int_{\sqrt{\pi}}^{2\sqrt{\pi}} 2x\cos(x^2)dx$. On posera $x = \sqrt{t}$.

16.12 Calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{2x^2-4x+5}dx$.

16.13 Calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t(t^3+1)}dt$ en posant $u = t^3$.

16.14 Calculer $\displaystyle\int_1^3 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}dt$ en posant $t = x^2$.

16.15 On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!}e^x dx$.

1. Montrer que la suite (I_n) converge vers 0.
2. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $I_n = \dfrac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}$.
3. En déduire que $e = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

16.16 On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_1^e x^2(\ln x)^n dx$.

1. Montrer que la suite (I_n) converge.
2. Montrer que sur $[1, e]$, $0 \leqslant \ln(x) \leqslant \dfrac{x}{e}$. En déduire la limite de (I_n).
3. Montrer que : $\forall n \geqslant 1,\ I_{n+1} = \dfrac{e^3}{3} - \dfrac{n+1}{3}I_n$.
   En déduire un équivalent de I_n lorsque $n \to +\infty$.

16.17 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1-x}dx$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Déterminer une relation entre I_n et I_{n-1} pour $n \geqslant 1$.
   En déduire la valeur de I_n pour tout $n \geqslant 1$.

16.18 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n} dt$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ln(2)$.
2. En déduire que la suite (u_n) converge.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \ln(2) - u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
4. En déduire la limite de la suite (u_n).

16.19 Soit F la fonction définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{\cos t} dt$

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction F et montrer que F est dérivable sur son domaine de définition. Calculer sa dérivée.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $F(x) \leq 0$.
3. Montrer que F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ |F(x)| \leq e|x|$.
5. Etudier la parité de la fonction F.

16.20 Soit $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et calculer sa dérivée.
2. Montrer que f peut se prolonger en une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.
3. En remarquant que $\ln(2) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{t}$ pour tout réel $x > 0$, montrer que f admet $\ln(2)$ pour limite en 0.
4. Etudier les variations et la convexité de f. Etudier le signe de $f(x)$ sur son domaine de définition.
5. Tracer l'allure de la courbe de f.

16.21 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n dt$.

1. Etablir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.
2. Montrer que la suite (I_n) converge.
3. Calculer I_n.
4. En déduire la valeur de $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

16.22 Pour $n \in \mathbb{N}$, on note : $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

1. Montrer que la suite (I_n) converge vers 0.
2. Calculer $I_n + I_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right)$

16.23 Soit P un polynôme tel que $\displaystyle\int_0^1 tP^2(t) dt = 0$.
Montrer que P est le polynôme nul.

16.24 On pose $g(x) = (2x-1) \displaystyle\int_{1/2}^{x} \frac{t^4 dt}{\sqrt{1+t^2+t^4}}$.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction g.
2. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \geq 0$.
3. Résoudre l'équation $g(x) = 0$.

16.25 Soit f la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+1}}$

1. Déterminer le domaine de définition de f puis étudier sa parité.
2. Démontrer que $0 \leq f(x) \leq \dfrac{1}{2x}$ et en déduire $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x)$

16.26 Soit f définie sur $]1, +\infty[$ par $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^3} \frac{dt}{\ln t}$.

1. Démontrer que f est dérivable sur $]1, +\infty[$ et calculer sa dérivée.
2. En déduire le sens de variations de f.
3. Démontrer que $\forall x > 1, f(x) \geq \dfrac{x^3 - x}{3 \ln x}$. En déduire $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

16.27 On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{\sin^n x}{\cos x} dx$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} \right)^n \displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{\cos x}$ et conclure sur la convergence de la suite (u_n).