15.1 1Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0, \dfrac{n^3-2n+4e-n}{2n^3+\ln n} > \dfrac{1}{4}$

2. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0,\ 0 < e^{-n} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$

15.2 Etudier la nature de la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin k$.

15.3 Soit une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite croissante et soit la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{u_1+u_2+\ldots+u_n}{n}$$

Etudier la monotonie de la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$.

15.4 Soit la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $\forall n \geqslant 1,\ S_n = 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}$.

1. Montrer que la suite (S_n) est croissante.
2. Montrer que $\forall n \geqslant 1,\ S_{2n} - S_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.
3. En déduire la nature de la suite (S_n).
4. Un élève a écrit : "Comme $S_{n+1} - S_n = \dfrac{1}{n+1}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_{n+1} - S_n = 0$. Par conséquent l'écart entre un terme de la suite et son suivant tend vers 0, la suite (S_n) est donc convergente." Que pensez-vous de son raisonnement ?

15.5 Dans cet exercice, $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = \cos x$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n \cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$$

1. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
2. On rappelle que $\sin(2a) = 2\cos(a)\sin(a)$ pour tout réel a. Montrer que la suite de terme général $v_n = u_n \sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$ est géométrique.
3. En déduire la nature de la suite (u_n) et sa limite si celle-ci est convergente.

15.6 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(2x)$. Montrer que f est constante.

15.7 Etudier la convergence éventuelle des suites de termes :

1. $x_n = n\cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$
2. $u_n = \dfrac{1}{n}\cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$
3. $t_n = \dfrac{n!}{2^n}$
   (Indication : montrer que $\forall n \geqslant 2, t_{n+1} \geqslant \dfrac{3}{2}t_n > 0$)

15.8 Soit la suite $(w_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$. Montrer que les suites $(w_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(w_{2n+1})_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes. Que peut-on en déduire pour la suite $(w_n)_{n\geqslant 1}$?

15.9 Soit la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ et la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?

15.10 Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$.

1. Calculer $f(0)$ puis étudier la parité de f.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \geqslant 1, f(nx) = nf(x)$ et en déduire que $\forall k \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, f(kx) = kf(x)$.
3. Soit $r = \dfrac{p}{q}$ un nombre rationnel avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que $f(r) = \lambda r$ avec $\lambda = f(1)$.
4. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda x$

15.11 1. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ 1 + x \leqslant e^x$.

2. Démontrer que $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définie pour $n \geqslant 1$ par $v_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$ est convergente.

15.12 Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{2}{1+u_n}$

1. Montrer que : $\forall n \geqslant 1,\ 2/3 \leqslant u_n \leqslant 2$.
2. Montrer si (u_n) est convergente, il n'y a qu'une seule limite possible. La déterminer.
3. Montrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et convergentes. Déterminer leur limite. Conclure.

15.13 Soit (u_n) définie par $u_0 \in]0,1[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$, puis que (u_n) converge vers 0.
2. Montrer que la série de terme général u_n^2 converge et calculer sa somme.

15.14 Soit (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.
2. Etudier le sens de variation et la convergence de la suite (u_n).
3. On pose pour tout entier n, $v_n = \ln(u_n)$.
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = v_0 - v_{n+1}$.
4. En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$.

15.15 On définit pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout $x \geqslant 0$, $g_n(x) = \dfrac{x^n e^{-x}}{n!}$.

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, la fonction g_n admet un maximum, noté M_n, que l'on calculera.
2. On note pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \sqrt{n} M_n$.
   On note également pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$.
   Ecrire un DL de a_n à l'ordre 2 lorsque $n \to +\infty$.
3. En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n$.
4. Montrer que la suite (u_n) converge vers un réel strictement positif.
5. En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} M_n$.

15.16 Déterminer si les séries suivantes sont convergentes et si oui, calculer leur somme :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(n-1)}$.
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\ln(n)\ln(n+1)}$
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$
4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n+2^n}{n!}$
5. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n}$
6. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{3}{5^n}$
7. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n+3}{n!} a^n$
8. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2}{n!}$
9. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2+3n}{2^n}$
10. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$

15.17 Déterminer la nature des séries de termes généraux :

1. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$
2. $u_n = \exp\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$
3. $u_n = 2^{2n-1} e^{-n}$
4. $u_n = \left(e^{1/n} - 1\right) \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$
5. $u_n = (-1)^n \ln\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)$
6. $u_n = \ln\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{n^3+1}}\right)$
7. $u_n = \ln\left(\dfrac{e^{2n}-1}{e^{2n}+1}\right)$
8. $u_n = \dfrac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$
9. $u_n = \dfrac{\ln(n)}{n^2}$
10. $u_n = \dfrac{(-1)^n \cos(n)}{n\sqrt{n}}$

15.18 Soit la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{\ln(n)}{n}$.

1. Déterminer la limite éventuelle de la suite (u_n).
2. Etudier la nature des séries suivantes :

$$\sum_{n\geqslant 1} u_n,\ \sum_{n\geqslant 2} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right),\ \sum_{n\geqslant 1} e^{u_n}\ \sum_{n\geqslant 1} \frac{u_n}{1+u_n},\ \sum_{n\geqslant 1} u_n^2,\ \sum_{n\geqslant 1} (-1)^n u_n$$