14.1 Déterminer si les applications suivantes sont linéaires ou non. Si oui, déterminer leur noyau et leur image.

1. $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & (x-y+t, 2x, y+z) \end{array}$
2. $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, 5x+y, 0) \end{array}$
3. $f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x+y, 0, x+2y) \end{array}$
4. $f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x-z, y+2) \end{array}$
5. $f_5 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (y+2z, x+y+z, x-y+z, x) \end{array}$

14.2 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$f \circ f = 0 \iff \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$$

Plus généralement, si E, F, G sont trois espaces vectoriels et si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$, montrer que

$$g \circ f = 0 \iff \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$$

14.3 Soit E un espace vectoriel et soit $f \in \mathcal{L}(E)$

1. Montrer qu'on a toujours $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$
2. Montrer qu'on a toujours $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$
3. Montrer qu'on a :
$$\left(\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)\right) \iff \left(\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{\overrightarrow{0_E}\}\right)$$
4. Montrer qu'on a :
$$\left(\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)\right) \iff \left(E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f)\right)$$

14.4 Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E qui vérifient :

$$f \circ g \circ f = f \qquad \text{et} \qquad g \circ f \circ g = g$$

1. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(g)$ et que $E = \mathrm{Ker}(g) \oplus \mathrm{Im}(f)$
2. Montrer que $f(\mathrm{Im}(g)) = \mathrm{Im}(f)$

14.5 Soit E un ev et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^2 - 5f + 6Id_E = 0$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(f - 3Id_E) \subset \mathrm{Ker}(f - 2Id_E)$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(f - 2Id_E) \subset \mathrm{Ker}(f - 3Id_E)$.
3. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f - 3Id_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2Id_E)$
4. Montrer que Id_E est combinaison linéaire de $f - 3Id_E$ et $f - 2Id_E$.
En déduire que $E = \mathrm{Im}(f - 2Id_E) \oplus \mathrm{Im}(f - 2Id_E)$

14.6 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}$ et $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM - MA \end{array}$.
Montrer que φ est linéaire et en déduire que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

14.7 Soit $n \geqslant 1$ et soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. On définit l'application φ sur E par $\forall P \in E,\ \varphi(P) = P'$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de E.
Déterminer son noyau et son image.
2. Calculer $(Id_E - \varphi) \circ (Id_E + \varphi + \varphi^2 + \cdots + \varphi^n)$.
3. Montrer que φ est un endomorphisme nilpotent de E, i.e. qu'il existe un entier $q \geqslant 1$ tel que $\varphi^q = 0$
4. Montrer que $Id_E - \varphi$ est un isomorphisme de E

14.8 Soit φ l'application définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ \varphi(P) = (X^2 - 1)P'' + (-X + 1)P'$$

Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$. Déterminer son image et son noyau.