

**13.1**

- Dans  $\mathbb{R}^3$ , le vecteur  $(-6, -17, 17)$  est-il une combinaison linéaire des vecteurs  $((2, 1, 3), (3, 5, -2))$  ?
- Dans  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$ , le vecteur  $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$  est-il une combinaison linéaire des vecteurs  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  ?
- Dans  $\mathbb{R}[X]$ , le polynôme  $P = X^3 + X^2 - 2X$  est-il une combinaison linéaire des polynômes  $X^2(X-1)$  et  $X(X-1)^2$  ?

**13.2** Soit  $A$  une matrice fixée de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ( $n \geq 1$ ).

On considère l'ensemble  $E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / AM = MA\}$ .  
Montrer que  $E$  est un espace vectoriel.

**13.3** Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels :

- $E = \left\{ \begin{pmatrix} a+2b & a-b \\ 3b & 2a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$
- $F = \{(x+y, x-y, 2y), x, y \in \mathbb{R}\}$
- $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x+2y-3z=0\}$
- $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x+y+z=0 \text{ et } 2x-y+z=0\}$
- $I = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) / -x+2y=y+6z \text{ et } y+3z=-2x \right\}$
- $J = \{(u_n) / \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} + 4u_n\}$
- $K = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ deux-fois dérivable} / f'' = 2f' - 3f\}$

**13.4** Montrer que la famille  $\mathcal{B} = ((1, 6, 9), (1, 4, 6), (3, 6, 2))$  est une famille génératrice de  $\mathbb{R}^3$ .

**13.5** Pour les espaces vectoriels suivants, déterminer une famille génératrice :

- $A = \{(x-y, x+y, 2x-3y), x, y \in \mathbb{R}\}$
- $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x=y=z\}$
- $C = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / 2x-y+2z-t=0 \text{ et } y+z-t=0\}$
- $D = \{P \in \mathbb{C}_3[X] / P(0) = P'(0) = 0\}$
- $E = \left\{ \begin{pmatrix} x & 2x-y \\ y & x+2y \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{R} \right\}$

**13.6** Les familles suivantes sont-elles libres ou liées ?

- $((1, 2, 0), (0, 2, 3))$  dans  $\mathbb{R}^3$ .
- $((1, -1, 0), (0, 2, 1), (-2, 0, 1))$  dans  $\mathbb{R}^3$ .
- $((1, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 4), (1, 2, 8, 16))$  dans  $\mathbb{R}^4$ .
- $(X^3, X^2(X-2), X(X-2)^2, (X-2)^3)$  dans  $\mathbb{R}[X]$
- $\left( \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \right)$  dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ .
- $((x \mapsto x), (x \mapsto e^x), (x \mapsto \ln(x)))$  dans l'espace vectoriel des fonctions définies sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .
- $(\cos, \sin)$  dans l'espace vectoriel des fonctions définies sur  $\mathbb{R}$

**13.7** Montrer que si  $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$  est une famille libre dans un espace vectoriel  $E$ , il en est de même pour la famille  $(\vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{x}_2 + \vec{x}_3, \vec{x}_3 + \vec{x}_1)$ .

**13.8** Déterminer une base des espaces vectoriels suivants :

- $A = \left\{ \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & x+y+z & y \\ z & y & x \end{pmatrix}, x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$
- $B = \{P \in \mathbb{R}[X] / P = aX^2 + (b-2a)X + a-b+c, a, b, c \in \mathbb{R}\}$
- $C = \{(x-y+z, 3x+6z, -2x+4y), x, y, z \in \mathbb{R}^3\}$
- $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x=y \text{ et } y=3z\}$

**13.9** Dans  $\mathbb{R}^3$ , déterminer une base et la dimension des sous-espaces vectoriels suivants :

1.  $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + y - z = 0\}$
2.  $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x = 0 \text{ et } 3y - z = 0\}$
3.  $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - z = 0 \text{ et } 3y - z = 0\}$
4.  $E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / -x - y + z = 0 \text{ et } 2x + y - 5z = 0\}$
5.  $E_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x - 3z = 4y - 5x\}$
6.  $E_6 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / -x + 2y = y + 6z = 3z - 2x\}$

**13.10** Déterminer si la famille donnée est une base de l'espace donné :

1.  $((1, 0, -2, 5), (7, -4, 3, 1), (0, 1, -1, 0), (1, -3, 0, 2))$  dans  $\mathbb{R}^4$
2.  $((1, 2, 3), (4, 5, 6))$  dans  $\mathbb{R}^3$
3.  $(3X^2 + X + 2, 3X^2 + X + 1, 2X^2 + X + 1)$  dans  $\mathbb{R}_2[X]$
4.  $\left( \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \right)$   
dans  $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ .

**13.11** Dans  $E = \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$ , on définit une loi  $+$  et une loi  $\cdot$  par

$$(x, y) + (x', y') = (xx', y + y') \quad \text{et} \quad \lambda \cdot (x, y) = (x^\lambda, \lambda y)$$

Vérifier que  $(E, +, \cdot)$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

**13.12** Dans  $\mathbb{R}^3$ , on donne :

$$F = \text{Vect}((0, 1, 1), (1, 0, 2)) \quad \text{et} \quad G = \text{Vect}((1, -2, 0), (1, 1, 3))$$

Montrer que  $F = G$ .

**13.13** Soit  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$ .

Soit  $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - 2y + z = 0\}$ .

Vérifier la formule de Grassman.

**13.14** Soit  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$ .

Soit  $G = \text{Vect}((1, 1, 1))$ .

Montrer que  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans  $\mathbb{R}^3$ .

**13.15** Soit  $E = \mathbb{R}^3$ .

1. Soit  $F = \text{Vect}((0, 1, 1), (1, 0, 2))$ . Trouver un vecteur  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$  tel que  $F \oplus \text{Vect}(\vec{x}) = E$ .
2. Même question avec  $F = \text{Vect}((1, 2, 3), (2, 2, 0))$ .

**13.16** Soit  $E = \mathbb{R}^3$ .

1. Soit  $F = \text{Vect}((1, 2, 2))$ . Trouver deux vecteurs  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  de  $\mathbb{R}^3$  tels que  $F \oplus \text{Vect}(\vec{x}, \vec{y}) = E$ .
2. Même question avec  $F = \text{Vect}((1, 0, 1))$ .

**13.17** Soit  $E$  l'espace vectoriel des fonctions définies sur  $\mathbb{R}$ .

On note  $F$  le sev des fonctions paires de  $E$  et  $G$  le sev des fonctions impaires de  $E$ .

Montrer que  $E = F \oplus G$ .