12.1 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ -4 & -2 & 2 \\ 0 & -6 & -2 \end{pmatrix}$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$.
Ecrire la matrice $B_\lambda = A - \lambda I_3$.

12.2 Soit $A = \begin{pmatrix} 2a+b+c & -a+b & c \\ b & 0 & a+c \end{pmatrix}$. Montrer que A est obtenue par combinaison linéaire de trois matrices fixes.

12.3 Soit $X = \begin{pmatrix} x-y+z \\ 2x+z \\ y \end{pmatrix}$. Montrer que X est combinaison linéaire de trois matrices fixes.

12.4 Soit $n \geqslant 1$ et $x \neq 1$. on pose $\forall k \in [\![1, n]\!],\ A_k = \begin{pmatrix} k & k^2 \\ \binom{n}{k} & x^k \end{pmatrix}$.

Calculer $B = \sum_{k=1}^{n} A_k$.

12.5 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Quels produits de matrices peut-on calculer entre A, B, C ? Les calculer.

12.6 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et soit (X_n) une suite de matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telle que $\forall n \geqslant 0, X_{n+1} = MX_n$.
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = M^n X_0$.

12.7 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^n en fonction de n.
2. Soit B une matrice telle que $A = B + I_2$. Calculer B^n en fonction de n.

12.8 Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En écrivant $B = I_3 + A$ où A est une matrice à déterminer, calculer B^n en fonction de n pour tout $n \geqslant 3$.

12.9 Soient (u_n) et (v_n) les suites définies par les relations de récurrence suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 6u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n + 4v_n \end{cases}$$

1. Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$
2. Déterminer la matrice J telle que $A = 5I_2 + J$.
3. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n.
4. En déduire l'expression de u_n et de v_n en fonction de n, u_0 et v_0.

12.10 Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$.

1. Calculer $(M-I)(M+3I)$ où I désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. En déduire M^2 en fonction de M et I.
3. Montrer que M est inversible et déterminer M^{-1}.

12.11 Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $M = \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $M^2 - (2+x)M + (1+x-2x^2)I_3$.
2. En déduire pour quelles valeurs de x la matrice M est inversible.

12.12

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que $A^k = 0$.
   Montrer que $I_n - A$ est inversible et que
   $$(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$$
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer sa matrice inverse.

12.13 Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, déterminer leur inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

12.14 Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on considère les matrices A et P suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 6 & -12 \\ 3 & -1 & 6 \\ 3 & -3 & 8 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.
2. Calculer $A^2 - A$ et en déduire que A est inversible et déterminer son inverse par une combinaison linéaire de A et de I.
3. Soit $D = P^{-1}AP$. Vérifier que D est une matrice diagonale.
4. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Calculer A^n.

12.15 Soient A, B deux matrices carrées d'ordre n telles que le produit AB soit inversible.
Montrer qu'alors les matrices A, B et BA sont également inversibles.

12.16 Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que A, B et $B - A$ soient inversibles.
Montrer que $A^{-1} - B^{-1}$ est inversible et que
$$(A^{-1} - B^{-1})^{-1} = B(B - A)^{-1}A$$

12.17 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que
$$A^4 - 2A^3 + A^2 - 3A + 5I_n = 0$$

1. En calculant le reste de la division euclidienne du polynôme $X^4 - 2X^3 + X^2 - 3X + 5$ par $X - 1$, montrer que $A - I_n$ est inversible.
2. Montrer que $A^2 - 3A + 2I_n$ est inversible.

12.18 Soit $m \in \mathbb{R}^*$ et soit
$$M = \begin{pmatrix} 0 & m & m^2 \\ 1/m & 0 & m \\ 1/m^2 & 1/m & 0 \end{pmatrix}$$
et on pose $B = M + I_3$ et $C_2 = 2I_3 - M$

1. Calculer BC. En déduire que M est inversible et calculer M^{-1}.
2. Calculer B^n et C^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Les matrices B et C sont-elles inversibles ?
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = \dfrac{2^n}{3}B + \dfrac{(-1)^n}{3}C$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$ et on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} M^k$.
   Calculer les 9 coefficients de la matrice S_n.