09.1 Démontrer les formules suivantes pour tous réels a et b.

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$
$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$
$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$$

09.2 Démontrer les formules suivantes pour tous réels a et b.

$$\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$
$$\cos(a) - \cos(b) = -2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)$$
$$\sin(a) + \sin(b) = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)$$
$$\sin(a) - \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

09.3 En utilisant la Formule de Moivre, exprimer $\cos(2x)$, $\cos(3x)$ et $\cos(5x)$ en fonction de $\cos(x)$.

09.4 Linéariser : $\sin^2(x)$, $\cos^3(x)$, $\sin^6(x)$, $\sin^2(x)\cos^3(x)$.

09.5 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $\sin(3x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
2. $\sin(3x) \geqslant -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
3. $\cos(x) \geqslant 0$
4. $\cos(x) = \sin(x)$
5. $\cos^2(x) \geqslant \sin^2(x)$.

09.6 Montrer les inégalités suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \sin(x) \leqslant x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) \geqslant 1 - \frac{x^2}{2}$$

09.7 Soit la fonction f définie sur $]0,1]$ par $f(x) = x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
Montrer que f admet un prolongement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.
La fonction f prolongée est-elle deux fois dérivable en 0 ?

09.8 Montrer que $\forall x \in [-1,1],\ \text{Arcsin}(x) + \text{Arccos}(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

09.9 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

09.10 Soit $f : x \longmapsto 2\text{Arctan}\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) + \text{Arctan}(x)$.
Montrer que la fonction f est constante sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa valeur.

09.11 Etudier les fonctions suivantes : ensemble de définition, symétries de f (parité, périodicité), tracer la courbe des fonctions f_j, simplifier l'expression des g_j en racines (sans fonction trigonométrique).

1. $f_1(x) = \cos(\text{Arccos}(x))$
2. $f_2(x) = \sin(\text{Arcsin}(x))$
3. $f_3(x) = \tan(\text{Arctan}(x))$
4. $f_4(x) = \text{Arccos}(\cos(x))$
5. $f_5(x) = \text{Arcsin}(\sin(x))$
6. $f_6(x) = \text{Arctan}(\tan(x))$
7. $g_1(x) = \sin(\text{Arccos}(x))$
8. $g_2(x) = \cos(\text{Arcsin}(x))$
9. $g_3(x) = \tan(\text{Arcsin}(x))$
10. $g_4(x) = \cos(\text{Arctan}(x))$
11. $g_5(x) = \sin(\text{Arctan}(x))$

09.12 Déterminer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{\cos(x)} - e}{\tan(x)\sin(3x)}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\left(e^{1/x} - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin(x)} - 1 - x\cos(x)}{x^3}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1+\sin(x)} - \sqrt{1-\sin(x)}}{\tan(x)}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2} (1-\sin(x))\tan^2(x)$
6. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(x))}{x^2}$

09.13 Déterminer le développement limité au voisinage de 0 des fonctions suivantes à l'ordre n donné :

1. $x \mapsto \tan(x)$, $n = 5$
2. $x \mapsto \ln(1+\cos(x))$, $n = 5$
3. $x \mapsto \text{Arctan}(x)$, $n = 5$
4. $x \mapsto \text{Arccos}(x)$, $n = 5$
5. $x \mapsto e^{\text{Arcsin}(x)}$, $n = 5$
6. $x \mapsto \sqrt{\cos(x)} - \cos(\sqrt{x})$, $n = 3$
7. $x \mapsto \dfrac{x - \sin(x)}{1 - \cos(x)}$, $n = 3$