

05.1 Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $|2x + 1| + |1 - x| \leq 3$.

05.2 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{Ent}(x + 1) = \text{Ent}(x) + 1$.

05.3 Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \sqrt{2x^2 + 3x + 1}$

2. $g : x \mapsto \sqrt{\frac{2x + 3}{x^2 - 5}}$

3. $h : x \mapsto \ln(\ln(|x|))$

4. $u : x \mapsto \ln^3(x)$

5. $v : x \mapsto \ln \left| \frac{x}{x^2 - 1} \right|$

6. $w : x \mapsto (1 + x)^{\frac{1}{x}}$

7. $z : x \mapsto x\sqrt{-\ln(x)}$

05.4 Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1 - e^x}{1 + e^x}$.

Déterminer le domaine de définition D_f de la fonction f , puis montrer que f est impaire sur D_f .

05.5 Etudier les axes et centres de symétrie des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \frac{x^2 - 5x - 7}{x - 1}, \quad f_2(x) = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}$$

$$f_3(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - x - 1}, \quad f_4(x) = \frac{5x + 7}{3x - 2}$$

05.6 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $f \circ f$ soit croissante sur \mathbb{R} et $f \circ f \circ f$ soit strictement décroissante sur \mathbb{R} . Montrer que f est strictement décroissante sur \mathbb{R} .

05.7 Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) \leq 1 - \frac{1}{x^2}$$

Justifier que f est majorée sur \mathbb{R} .

05.8 Soit la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = -\frac{x}{1+x}$.

1. Sur $[0, +\infty[$ la fonction f admet-elle un maximum ? un minimum ?
2. Montrer que f est bornée sur $[0, +\infty[$. Déterminer ses bornes inférieures et supérieures.

05.9 Tracer les courbes représentatives des fonctions :

$$f(x) = \ln(x), \quad g(x) = \ln(x + 1), \quad h(x) = \ln(x) + 1$$

$$u(x) = -\ln(x), \quad v(x) = \ln(-x)$$

$$w(x) = |\ln(x)|, \quad y(x) = \ln(|x|)$$

05.10 La fonction f est définie sur \mathbb{R} , de période 1, et vérifie :

$$\forall x \in [0, 1[, f(x) = \ln(1 + x)$$

Tracer la courbe représentative de la fonction f et déterminer l'expression de f sur l'intervalle $[-1, 0[$

05.11 Résoudre dans \mathbb{R} les équations et inéquations suivantes :

1. $\ln(\sqrt{2x - 3}) = \ln(6 - x) - \frac{1}{2} \ln(x)$

2. $(x^2 - 1)e^{\ln(x-2)} = \ln(e^{x+1})$

3. $e^{2x-1} - \sqrt{e^{2x+2}} - 2e^3 = 0$

4. $\ln(|2x + 1|) \leq 1$