

03.1 Soit $E = \{1, 2\}$. Déterminer $\mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$.

03.2 Soit $E = \{\{1, 2\}\}$. Déterminer $\mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$.

03.3 Soit E un ensemble et A et B deux parties de E . Simplifier l'expression suivante :

$$(A \cap {}^c B) \cup (A \cap B)$$

03.4 Soient E, F et G trois ensembles non vides. Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications.

1. Montrer que si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
2. Montrer que si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.

03.5 Soient E, F et G trois ensembles non vides. Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications.

1. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
2. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
3. Montrer que si $g \circ f$ injective et f surjective, alors g injective.
4. Montrer que si $g \circ f$ surjective et g injective, alors f surjective.

03.6 Soient E et F non vides et soit $f : E \rightarrow F$ une application.

1. Montrer que f injective $\iff \forall A \in \mathcal{P}(E), f^{-1}(f(A)) = A$
2. Montrer que f surjective $\iff \forall B \in \mathcal{P}(F), f(f^{-1}(B)) = B$
3. Montrer que f injective $\iff \forall A, B \in \mathcal{P}(E), f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

03.7 Pour chaque application suivante, pour tout y élément de l'ensemble d'arrivée, déterminer le nombre d'antécédent de y :

$$1. f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x^2 + 3x + 4 \end{array}$$

$$2. g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{1/2\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{4x + 5}{6x - 3} \end{array}$$

$$3. h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \setminus \{-1\} \\ x & \longmapsto & \frac{1 + x}{1 - x} \end{array}$$

$$4. u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (a, b) & \longmapsto & (a + b, a - b) \end{array}$$

03.8 On considère les deux applications

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{array}, \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array}$$

1. Déterminer si f est injective, surjective, bijective.
2. Montrer que g est bijective et déterminer sa bijection réciproque.