

**02.1**

1. Ecrire avec les pointillés les sommes suivantes :

$$S_n = \sum_{i=2}^n \frac{1}{1+i}, \quad T_n = \sum_{k=1}^n \frac{i}{1+k}, \quad U_n = \sum_{0 \leq 2k \leq n} a_{2k}$$

2. Calculer  $A(n) = \sum_{k=n}^{2n} 1$ . Combien vaut  $A(2n)$  ?

3. On note pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k$ .

Calculer  $S_{2n}$  et  $S_{2n+1}$ .

4. Ecrire en  $\sum$  la somme  $(1+x) + (1+x)^2 + \dots + (1+x)^n$ .

5. Ecrire en  $\sum$  la somme  $\frac{1}{2} - \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} - \frac{4}{2^4} + \dots$ , la somme contenant  $n+1$  termes.

6. Ecrire en  $\prod$  le produit  $n(n-1) \dots (n-p+1)$  puis uniquement avec des factorielles.

7. Ecrire en  $\prod$  le produit  $2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2n$  puis uniquement avec des factorielles et puissances.

8. Ecrire en  $\prod$  le produit  $1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)$  puis uniquement avec des factorielles et puissances.

**02.2** Calculer en fonction de  $n$  les sommes suivantes :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right), \quad T_n = \sum_{k=1}^n \ln \left( \frac{k+1}{k} \right), \quad U_n = \sum_{k=1}^n (\ln(k+2) - \ln(k))$$

**02.3** Montrer que pour tout  $n \geq 1$ ,  $\sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$ .

On rappelle que  $k = (k+1) - 1 \dots$

**02.4** Soient  $a$  et  $b$  deux réels. Montrer que pour tout  $n \geq 1$ , on a :

$$(a-b) \left( \sum_{k=1}^n a^{k-1} b^{n-k} \right) = a^n - b^n$$

**02.5** Montrer par récurrence que :

$$1. \forall n \geq 1, \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$$

$$2. \forall n \geq 1, \prod_{k=1}^n (n+k) = 2^n \prod_{k=1}^n (2k-1).$$

**02.6** Calculer les sommes suivantes :

$$1. \sum_{k=2}^n 2^k$$

$$2. \sum_{k=0}^{2n} 5^{-k}$$

$$3. \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^{k-1}}{2^{3k-2}}$$

$$4. \sum_{k=0}^n (2k+1)$$

$$5. \sum_{k=0}^n \frac{3^{n+k}}{2^k}$$

$$6. \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

$$7. \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$$

$$8. \sum_{k=2}^n \frac{2+4^{n+k}}{2^k}$$

$$9. \sum_{k=1}^n k(k^2-2k)$$

$$10. \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2$$

$$11. \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} 3^k$$

$$12. \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} 2^k$$

**02.7** Montrer que pour tous  $n$  et  $p$  tels que  $0 \leq p \leq n$ , on a la formule

$$\text{suivante : } \sum_{k=0}^p \binom{n-k}{p-k} = \binom{n+1}{p}.$$

**02.8** Soient  $n$  et  $p$  deux entiers tels que  $1 \leq p \leq n-1$ . Montrer que

$$\text{pour tout entier } j \text{ tel que } 0 \leq j \leq p, \text{ on a : } \binom{n}{j} \binom{n-j}{p-j} = \binom{n}{p} \binom{p}{j}.$$

En déduire la valeur de  $\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \binom{n-j}{p-j}$