19.1 Montrer que les intégrales suivantes sont convergentes, et calculer leur valeur :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}}$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2}dt$
3. $\displaystyle\int_{-\infty}^0 te^{-t^2}dt$
4. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{3^t}dt$

19.2 Déterminer la nature des intégrales impropres suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{2t+3}{5t^3+3t^2+7}}dt$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t-5}{2t^3+4t+4}dt$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^3}dt$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2+\ln(t)}{t+4}dt$
5. $\displaystyle\int_1^{2} \frac{1}{t^2-t}dt$
6. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}dt.$
7. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{t^3+3t^2+t}}dt$
8. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt$
9. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+1}dt$
10. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2}dt.$
11. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(t)}{t-1}dt.$
12. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{\sqrt{e^t-1}}dt$

19.3 Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt$ sont convergentes et opposées (on pourra effectuer le changement de variable $u=\dfrac{1}{t}$).

En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt$

19.4 On pose $I=\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2-1}{(1+t^2)\sqrt{1+t^4}}dt.$

1. Montrer que l'intégrale converge.
2. En utilisant le changement de variable $u=\dfrac{1}{t}$, calculer I.

19.5 Soit F la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $F(x)=\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t}dt.$

1. Montrer que F est bien définie sur $[0,+\infty[$. Montrer qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ et déterminer F'.
2. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xF(x)=0$.
3. Démontrer la convergence de $I=\displaystyle\int_0^{+\infty} F(x)dx$ et la calculer en fonction de $F(0)$.

19.6 Soit f la fonction définie par $f(x)=\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t}dt.$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Quel est le sens de variations de f ?
3. On admet que f est une fonction continue sur son ensemble de définition.
   Déterminer $f(x)+f(x+1)$ pour $x>0$.
   En déduire la limite de f en 0 et en $+\infty$.

19.7

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)dt$ converge. On note ℓ sa valeur.
2. Soit x un réel strictement positif. Montrer que
   $$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt = -\ln(x)+\ell+\int_0^x \frac{1-e^{-t}}{t}dt$$
   (après avoir justifié l'existence des intégrales).
   En déduire $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt+\ln(x)\right)$.