18.1 Déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, et celle de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$ dans les cas suivants :

1. $\mathcal{B}$ est la base can. de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}' = ((2,1,-2),(3,1,-2),(0,1,-1))$.
2. $\mathcal{B}$ est la base can. de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ et $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$
3. $\mathcal{B}$ base can. de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{B}' = (-X^2+2X+1, X+1, X^2+2)$.

18.2 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ et les matrices colonnes :

$X_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que les vecteurs X_1, X_2 et X_3 sont des vecteurs propres de A et déterminer les valeurs propres associées.

18.3 Déterminer les valeurs propres ainsi qu'une base des sous-espaces propres associés pour chacune des matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix}$

Les matrices A et B sont-elles diagonalisables ?

18.4 Soit $M = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 18 & 12 \\ 2 & 6 & 4 \\ 3 & 9 & 6 \end{pmatrix}$. Montrer que $M^2 = 3M$.

Déterminer les valeurs propres de M et les sous-espaces propres associés. La matrice M est-elle diagonalisable ?

18.5 Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ? inversibles ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

18.6 Déterminer si les matrices suivantes sont diagonalisables. Si oui, les diagonaliser.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -14 \\ 6 & 6 & -16 \\ 5 & 5 & -14 \end{pmatrix}, \quad E = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

18.7 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Diagonaliser A.

2. Déterminer le terme général des suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = u_n + 3v_n \end{cases}$.

18.8 Soit $a \in \mathbb{R}$. On note u_a l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad (u_a(P))(X) = \frac{1}{2}P(X) + aX\int_0^1 P(t)dt.$$

1. Pour quelles valeurs de a u_a est-il un automorphisme ? Pour les valeurs trouvées, déterminer l'endomorphisme u_a^{-1}.
2. Déterminer les valeurs propres de u_a et les sous-espaces propres associés. u_a est-il diagonalisable ?

18.9 Soit $n \geqslant 2$ et $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}[X]$ l'application définie pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ par $\varphi(P) = 2XP' - P''$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$
2. Déterminer les valeurs propres de φ. φ est-elle diagonalisable ?