16.1 Déterminer le développement limité au voisinage de 0 des fonctions suivantes à l'ordre n donné :

1. $x \mapsto \ln(1+x) + e^x$, $n = 4$
2. $x \mapsto e^{-x}\ln(1+x)$, $n = 3$
3. $x \mapsto \ln(1+x+x^2)$, $n = 3$
4. $x \mapsto \tan(x)$, $n = 5$
5. $x \mapsto (1+2x)^{\frac{1}{1+x}}$, $n = 3$
6. $x \mapsto \dfrac{x}{\ln(1+x)}$, $n = 3$
7. $x \mapsto \ln(1+\cos(x))$, $n = 5$
8. $x \mapsto x - x^3 + x^4$, $n \in \{2, 4, 15\}$
9. $x \mapsto \mathrm{Arctan}(x)$, $n = 5$
10. $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $n = 4$
11. $x \mapsto \mathrm{Arccos}(x)$, $n = 5$
12. $x \mapsto e^{\mathrm{Arcsin}(x)}$, $n = 5$
13. $x \mapsto \sqrt{1+\sqrt{1+x}}$, $n = 2$
14. $x \mapsto \sqrt{\cos(x)} - \cos(\sqrt{x})$, $n = 3$
15. $x \mapsto \dfrac{x-\sin(x)}{1-\cos(x)}$, $n = 3$
16. $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \exp(-t^2)dt$, $n = 5$

16.2 Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 4 de la fonction $f : x \mapsto \ln(1+e^{-x})$. En déduire $f'(0)$, $f''(0)$, $f^{(3)}(0)$ et $f^{(4)}(0)$.

16.3 Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\ln(x+1) - x\ln(x)$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - \sin(x)}{\cos(x) - 1}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin(x)} - 1 - x\cos(x)}{x^3}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(x))}{x^2}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{e^{x^2+x} - e^{2x}}{x-1}$
7. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (x^3+x)^{1/3} - (x^3-x)^{1/3}$
8. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \ln(x)}$
9. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\left(\ln(x^2+x+1) - 2\ln(x)\right)$
10. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(2\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \sqrt{1+\frac{2}{n}}\right)^{n^2}$

16.4 Soit f définie sur $]0,\pi]$ par : $\forall x \in]0,\pi]$, $\dfrac{1}{\sin(x)} - \dfrac{1}{x}$.
Montrer que f admet un prolongement de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de 0.

16.5 On pose $\forall x \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[$, $f(x) = \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2}$.

1. Déterminer le $DL_2(0)$ de f. Montrer alors que f peut être prolongée par continuité en 0 et que ce prolongement est alors dérivable en 0.
2. Déterminer alors l'équation de la tangente en 0 et étudier la position de la courbe de f par rapport à sa tangente en 0.

16.6 Soit $f : x \mapsto x + \ln(1+x)$.

1. Montrer que f admet au voisinage de 0 une fonction réciproque et que f^{-1} admet un développement limité à l'ordre 3 en 0.
2. Calculer ce développement limité.
3. Mêmes questions pour $f : x \mapsto x + x^2 + x^3$.

16.7 On pose $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0, ainsi que la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à cette tangente.

16.8 On pose pour tout $x > 0$, $f(x) = \dfrac{x}{1+\exp(1/x)}$.
Montrer qu'on a $f(x) = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{48x^2} + \dfrac{1}{x^2}\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Que peut-on en déduire graphiquement ?

16.9 Donner un DL à l'ordre 2 de $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x+1+\sqrt{1+x^2}}$ en 0, $+\infty$ et $-\infty$. En déduire l'allure de $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$, $-\infty$, et 0.

16.10 Soient a, b deux réels et $g : \ln(1+2x) - a\sin(x) - bxe^x$.
Déterminer a et b pour que g soit négligeable devant la plus grande puissance possible au voisinage de 0, puis donner dans ce cas un équivalent de g en 0.

16.11 Déterminer les réels a, b, c tels que $\dfrac{1 + ae^x + be^{2x} + c\sin(x)}{x^3}$ admette une limite finie en 0.