

15.1 Déterminer une primitive de :

1. $x \mapsto e^{-3x+5}$ sur \mathbb{R} .
2. $x \mapsto \tan x$ sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ et $\left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$

15.2 Montrer que la fonction F définie sur \mathbb{R} par $F(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ est une primitive de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

15.3 Existe-t-il des réels a et b tels que $F(x) = e^x(a \cos x + b \sin x)$ soit une primitive de la fonction $x \mapsto e^x \cos x$.

15.4 Après avoir justifié son existence, calculer $\int_2^3 \frac{1}{1-t^2} dt$.
On cherchera pour cela deux réels a et b tels que $\frac{1}{1-t^2} = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t}$.
De même en décomposant les fractions rationnelles en éléments simples, calculer :

$$\int_1^2 \frac{3t+1}{t(t+1)} dt, \quad \int_0^1 \frac{1}{(t-2)(t+3)} dt, \quad \int_1^2 \frac{1}{t(t+1)(t+2)} dt$$

15.5 Déterminer la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{2(x-1)}$ définie sur $]1, +\infty[$ et qui s'annule en 3.

15.6 Justifier que la fonction Arctan admet des primitives sur \mathbb{R} et les calculer.

15.7 Calculer les primitives des fonctions suivantes :

$$x \mapsto e^x \cos x, \quad x \mapsto \frac{\ln x}{x^n}, n \in \mathbb{N}, \quad x \mapsto x \operatorname{Arctan}(x), \quad (x^2 + x + 1)e^x$$

15.8 Soit $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ avec $n \geq m$. Calculer $\int_m^n \operatorname{Ent}(x) dx$.

15.9 Soit $I = \int_1^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$. Calculer I en posant $u = \sqrt{e^x - 1}$.

15.10 Calculer $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sin t}$ à l'aide de $u = \cos t$.

15.11 Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{\cos t}$ à l'aide de $x = \sin t$.

15.12 Calculer $J = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x \sin x} dx$. On posera $u = \sin x$.

15.13 Calculer $\int_{\sqrt{\pi}}^{2\sqrt{\pi}} 2x \cos(x^2) dx$. On posera $x = \sqrt{t}$.

15.14 Calculer $\int_1^2 \frac{1}{2x^2 - 4x + 5} dx$.

15.15 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement croissante et continûment dérivable.

On considère les deux intégrales $I_1 = \int_a^b f(t) dt$ et $I_2 = \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t) dt$

1. Rappeler pourquoi f admet une fonction réciproque f^{-1} .
2. Faire le changement de variable $t = f(u)$ dans l'intégrale I_2 .
3. Calculer I_2 en fonction de I_1 .
4. Faire un dessin faisant apparaître f et f^{-1} et interpréter ce résultat géométriquement.

15.16 Montrer que $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right) dx$ et en déduire la valeur de $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x) dx$.

15.17 Soit P un polynôme tel que $\int_0^1 t P^2(t) dt = 0$.
Montrer que P est le polynôme nul.

15.18 Soit F la fonction définie par $F(x) = \int_0^x e^{\cos t} dt$

- Déterminer le domaine de définition de la fonction F et montrer que F est dérivable sur son domaine de définition. Calculer sa dérivée.
- Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $F(x) \leq 0$.
- Montrer que F est strictement croissante sur \mathbb{R} .
- Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, |F(x)| \leq e|x|$.
- Etudier la parité de la fonction F .

15.19 Soit $f(x) = \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$.

- Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ et calculer sa dérivée.
- Montrer que f peut se prolonger en une fonction \mathcal{C}^1 sur $[0, +\infty[$.
- En remarquant que $\ln(2) = \int_x^{2x} \frac{dt}{t}$ pour tout réel $x > 0$, montrer que f admet $\ln(2)$ pour limite en 0.
- Etudier les variations et la convexité de f . Etudier le signe de $f(x)$ sur son domaine de définition.
- Tracer l'allure de la courbe de f .

15.20 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$.

- Etablir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1} .
- Montrer que la suite (I_n) converge.
- Calculer I_n .

4. En déduire la valeur de $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

15.21 Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f(t) = \int_t^1 x^{2p+1} \ln x dx$.

- Montrer que f est continue sur $[0, 1]$. Peut-on réaliser un prolongement par continuité en 0 ?
- f est-elle dérivable sur $[0, 1]$? Si oui, calculer $f'(t)$ pour $t \in [0, 1]$.
- Calculer $f(t)$ pour $t \in (0, 1]$

15.22 On pose $g(x) = (2x-1) \int_{1/2}^x \frac{t^4 dt}{\sqrt{1+t^2+t^4}}$.

- Déterminer le domaine de définition de la fonction g .
- Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \geq 0$.
- Résoudre l'équation $g(x) = 0$.

15.23 Soit f la fonction définie par $f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+1}}$

- Déterminer le domaine de définition de f puis étudier sa parité.
- Démontrer que $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2x}$ et en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

15.24 Pour $n \in \mathbb{N}$, on note : $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

- Montrer que la suite (I_n) converge vers 0.
- Calculer $I_n + I_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right)$

15.25 Soit f définie sur $]1, +\infty[$ par $f(x) = \int_x^{x^3} \frac{dt}{\ln t}$.

- Démontrer que f est dérivable sur $]1, +\infty[$ et calculer sa dérivée.
- En déduire le sens de variations de f .
- Démontrer que $\forall x > 1, f(x) \geq \frac{x^3 - x}{3 \ln x}$. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

15.26 On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_n = \int_0^{\pi/3} \frac{\sin^n x}{\cos x} dx$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \int_0^{\pi/3} \frac{dx}{\cos x}$ et conclure sur la convergence de la suite (u_n) .

15.27 Etudier les convergences des suites définies par :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}, \quad v_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k^2}, \quad w_n = \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2) \cdots (2n)}$$