

14.1 Dans chacun des cas suivants, exprimer u_n en fonction de n , calculer $v_n = \sum_{k=1}^n u_k$ en fonction de n et étudier les convergences des suites $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$.

- $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 1 + \frac{2}{5}u_n$ pour $n \geq 0$
- $u_2 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{14}{3} + \frac{1}{3}u_n$ pour $n \geq 2$.
- $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = -3 + \frac{1}{2}u_n$ pour $n \geq 0$
- $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{3u_n}$. On justifiera que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ puis on considèrera la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \ln u_n$.

14.2 Soit la suite (u_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$. Etudier suivant les valeurs de a et b la nature de la suite (u_n) .

14.3 Etudier la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ définie par $v_0 = 1, v_1 = 2$ et $\forall n \geq 2, v_{n+2} = \sqrt{v_n v_{n+1}}$.

14.4 Soit la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_0 = 1, u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$. Calculer u_n en fonction de n .

14.5 Soit une suite $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite croissante et soit la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n}$$

Etudier la monotonie de la suite $(v_n)_{n \geq 1}$.

14.6

- Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, \frac{n^3 - 2n + 4e^{-n}}{2n^3 + \ln n} > \frac{1}{4}$
- Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, 0 < e^{-n} \leq \frac{1}{n^2}$

14.7 Soit la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ définie par $\forall n \geq 1, S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$.

- Montrer que la suite (S_n) est croissante.
- Montrer que $\forall n \geq 1, S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}$.
- En déduire la nature de la suite (S_n) .
- Un élève a écrit : "Comme $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{n+1}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n+1} - S_n = 0$. Par conséquent l'écart entre un terme de la suite et son suivant tend vers 0, la suite (S_n) est donc convergente." Que pensez-vous de son raisonnement ?

14.8 Etudier la nature de la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sin k$.

14.9 Dans cet exercice, $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = \cos x$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$$

- Montrer que la suite (u_n) est convergente.
- On rappelle que $\sin(2a) = 2 \cos(a) \sin(a)$ pour tout réel a . Montrer que la suite de terme général $v_n = u_n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)$ est géométrique.
- En déduire la nature de la suite (u_n) et sa limite si celle-ci est convergente.

14.10 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue en 0 telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(2x)$. Montrer que f est constante.

14.11 Etudier la convergence éventuelle des suites de termes :

- | | |
|--|--|
| <ol style="list-style-type: none"> $x_n = n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ $u_n = \frac{1}{n} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ | $\left \begin{array}{l} 3. t_n = \frac{n!}{2^n} \\ \text{(Indication : montrer que } \\ \forall n \geq 2, t_{n+1} \geq \frac{3}{2}t_n > 0) \end{array} \right.$ |
|--|--|

14.12 Soit la suite $(w_n)_{n \geq 1}$ définie par $w_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$. Montrer que les suites $(w_{2n})_{n \geq 1}$ et $(w_{2n+1})_{n \geq 1}$ sont adjacentes. Que peut-on en déduire pour la suite $(w_n)_{n \geq 1}$?

14.13 Soit la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$ et la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ définie par $v_n = u_n + \frac{1}{n}$. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?

14.14 Soit f une fonction définie et continue sur \mathbb{R} telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y)$.

1. Calculer $f(0)$ puis étudier la parité de f .
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \geq 1, f(nx) = nf(x)$ et en déduire que $\forall k \in \mathbb{Z} \forall x \in \mathbb{R}, f(kx) = kf(x)$.
3. Soit $r = \frac{p}{q}$ un nombre rationnel avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que $f(r) = \lambda r$ avec $\lambda = f(1)$.
4. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda x$

14.15

1. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+, 1+x \leq e^x$.
2. Démontrer que $(v_n)_{n \geq 1}$ définie pour $n \geq 1$ par $v_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$ est convergente.

14.16 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4, u_3 = 0$ et $\forall n \geq 2, u_n = 4u_{n-2}$. Déterminer u_n en fonction de n . La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, déterminer sa limite.

14.17 Discuter suivant la valeur de u_0 la convergence de la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - u_n^2$$

14.18 Etudier la convergence de la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ définie par $x_0 = \frac{3}{2}$ et $x_{n+1} = \sqrt{4x_n - 3}$.

14.19 Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2}{1+u_n}$

1. Montrer que la suite (u_n) est bornée puis que si elle est convergente, il n'y a qu'une seule limite possible. La déterminer.

Nous allons montrer que (u_n) converge par deux méthodes.

2. **Méthode 1** : Utilisation des suites d'indices pairs et impairs.
 - (a) Déterminer l'expression de la fonction associée aux suites d'indices pairs et impairs.
 - (b) Montrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et convergentes. Déterminer leur limite. Conclure.
3. **Méthode 2** : Mettre en place une inégalité.
 - (a) Montrer que $\forall n \geq 1, u_n \in \left[\frac{2}{3}, 2\right]$.
 - (b) Soit la fonction f définie sur $\left[\frac{2}{3}, 2\right]$ par $f(x) = \frac{2}{1+x}$. Montrer que $\forall x \in \left[\frac{2}{3}, 2\right], |f(x) - 1| \leq \frac{18}{25}|x - 1|$.
 - (c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - 1| \leq \left(\frac{18}{25}\right)^n |u_1 - 1|$. Conclure.

14.20 On définit $u_0 = 0$ et on pose : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{12 - u_n}$.

1. Etudier la fonction $f : x \mapsto \sqrt{12 - x}$ (domaine de définition, variations, points fixes, graphe).
2. Montrer que la suite (u_n) est bien définie.
3. (a) Etudier la monotonie des suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) .
 - (b) Montrer que $\forall n \geq 1, |u_{2n+1} - u_{2n}| \leq \frac{1}{4\sqrt{2}} |u_{2n} - u_{2n-1}|$
 - (c) En déduire que ces suites sont adjacentes.
4. La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?