

12.1 Déterminer si les applications suivantes sont linéaires ou non. Si oui, déterminer leur noyau et leur image.

- $f_1 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $(x, y, z, t) \mapsto (x - y + t, 2x, y + z)$
- $f_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $(x, y, z) \mapsto (x + y, 5x + y, 0)$
- $f_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $(x, y) \mapsto (2x + y, 0, x + 2y)$
- $f_4 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y, z) \mapsto (2x - z, y + 2)$
- $f_5 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$
 $(x, y, z) \mapsto (y + 2z, x + y + z, x - y + z, x)$

12.2 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$f \circ f = 0 \iff \text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$$

Plus généralement, si E, F, G sont trois espaces vectoriels et si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, montrer que

$$g \circ f = 0 \iff \text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)$$

12.3 Soit E un espace vectoriel et soit $f \in \mathcal{L}(E)$

- Montrer qu'on a toujours $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$
- Montrer qu'on a toujours $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$
- Montrer qu'on a :

$$\left(\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2) \right) \iff \left(\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{\vec{0}_E\} \right)$$

- Montrer qu'on a :

$$\left(\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2) \right) \iff \left(E = \text{Im}(f) + \text{Ker}(f) \right)$$

12.4 Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E qui vérifient :

$$f \circ g \circ f = f \quad \text{et} \quad g \circ f \circ g = g$$

- Montrer que $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(g)$ et que $E = \text{Ker}(g) \oplus \text{Im}(f)$
- Montrer que $f(\text{Im}(g)) = \text{Im}(f)$

12.5 Soit E un ev et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^2 - 5f + 6Id_E = 0$.

- Montrer que $\text{Im}(f - 3Id_E) \subset \text{Ker}(f - 2Id_E)$.
- Montrer que $\text{Im}(f - 2Id_E) \subset \text{Ker}(f - 3Id_E)$.
- Montrer que $E = \text{Ker}(f - 3Id_E) \oplus \text{Ker}(f - 2Id_E)$
- Montrer que Id_E est combinaison linéaire de $f - 3Id_E$ et $f - 2Id_E$.
En déduire que $E = \text{Im}(f - 2Id_E) \oplus \text{Im}(f - 3Id_E)$

12.6 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
 $M \mapsto AM - MA$.

Montrer que φ est linéaire et en déduire que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

12.7 Soit $n \geq 1$ et soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. On définit l'application φ sur E par $\forall P \in E, \varphi(P) = P'$.

- Montrer que φ est un endomorphisme de E .
Déterminer son noyau et son image.
- Calculer $(Id_E - \varphi) \circ (Id_E + \varphi + \varphi^2 + \dots + \varphi^n)$.
- Montrer que φ est un endomorphisme nilpotent de E , i.e. qu'il existe un entier $q \geq 1$ tel que $\varphi^q = 0$
- Montrer que $Id_E - \varphi$ est un isomorphisme de E

12.8 Soit φ l'application définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \varphi(P) = (X^2 - 1)P'' + (-X + 1)P'$$

Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$. Déterminer son image et son noyau.