

11.1

- Dans \mathbb{R}^3 , le vecteur $(-6, -17, 17)$ est-il une combinaison linéaire des vecteurs $((2, 1, 3), (3, 5, -2))$?
- Dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$, le vecteur $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est-il une combinaison linéaire des vecteurs $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$?
- Dans $\mathbb{R}[X]$, le polynôme $P = X^3 + X^2 - 2X$ est-il une combinaison linéaire des polynômes $X^2(X - 1)$ et $X(X - 1)^2$?

11.2 Soit A une matrice fixée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ($n \geq 1$).

On considère l'ensemble $E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / AM = MA\}$.
Montrer que E est un espace vectoriel.

11.3 Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels :

- $E = \left\{ \begin{pmatrix} a + 2b & a - b \\ 3b & 2a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$
- $F = \{(x + y, x - y, 2y), x, y \in \mathbb{R}\}$
- $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y - 3z = 0\}$
- $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0 \text{ et } 2x - y + z = 0\}$
- $I = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) / -x + 2y = y + 6z \text{ et } y + 3z = -2x \right\}$
- $J = \{(u_n) / \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} + 4u_n\}$
- $K = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ deux-fois dérivable} / f'' = 2f' - 3f\}$

11.4 Montrer que la famille $\mathcal{B} = ((1, 6, 9), (1, 4, 6), (3, 6, 2))$ est une famille génératrice de \mathbb{R}^3 .

11.5 Pour les espaces vectoriels suivants, déterminer une famille génératrice :

- $A = \{(x - y, x + y, 2x - 3y), x, y \in \mathbb{R}\}$
- $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = y = z\}$
- $C = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / 2x - y + 2z - t = 0 \text{ et } y + z - t = 0\}$
- $D = \{P \in \mathbb{C}_3[X] / P(0) = P'(0) = 0\}$
- $E = \left\{ \begin{pmatrix} x & 2x - y \\ y & x + 2y \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{R} \right\}$

11.6 Les familles suivantes sont-elles libres ou liées ?

- $((1, 2, 0), (0, 2, 3))$ dans \mathbb{R}^3 .
- $((1, -1, 0), (0, 2, 1), (-2, 0, 1))$ dans \mathbb{R}^3 .
- $((1, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 4), (1, 2, 8, 16))$ dans \mathbb{R}^4 .
- $(X^3, X^2(X - 2), X(X - 2)^2, (X - 2)^3)$ dans $\mathbb{R}[X]$
- $\left(\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \right)$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
- $((x \mapsto x), (x \mapsto e^x), (x \mapsto \ln(x)))$ dans l'espace vectoriel des fonctions définies sur \mathbb{R}^{+*} .
- (\cos, \sin) dans l'espace vectoriel des fonctions définies sur \mathbb{R}

11.7 Montrer que si $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ est une famille libre dans un espace vectoriel E , il en est de même pour la famille $(\vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{x}_2 + \vec{x}_3, \vec{x}_3 + \vec{x}_1)$.

11.8 Déterminer une base des espaces vectoriels suivants :

- $A = \left\{ \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & x + y + z & y \\ z & y & x \end{pmatrix}, x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$
- $B = \{P \in \mathbb{R}[X] / P = aX^2 + (b - 2a)X + a - b + c, a, b, c \in \mathbb{R}\}$
- $C = \{(x - y + z, 3x + 6z, -2x + 4y), x, y, z \in \mathbb{R}^3\}$
- $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x = y \text{ et } y = 3z\}$

11.9 Dans \mathbb{R}^3 , déterminer une base et la dimension des sous-espaces vectoriels suivants :

- $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + y - z = 0\}$
- $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x = 0 \text{ et } 3y - z = 0\}$
- $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - z = 0 \text{ et } 3y - z = 0\}$
- $E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / -x - y + z = 0 \text{ et } 2x + y - 5z = 0\}$
- $E_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x - 3z = 4y - 5x\}$
- $E_6 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / -x + 2y = y + 6z = 3z - 2x\}$

11.10 Déterminer si la famille donnée est une base de l'espace donné :

- $((1, 0, -2, 5), (7, -4, 3, 1), (0, 1, -1, 0), (1, -3, 0, 2))$ dans \mathbb{R}^4
- $((1, 2, 3), (4, 5, 6))$ dans \mathbb{R}^3
- $(3X^2 + X + 2, 3X^2 + X + 1, 2X^2 + X + 1)$ dans $\mathbb{R}_2[X]$
- $\left(\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \right)$ dans $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.

11.11 Dans $E = \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$, on définit une loi $+$ et une loi \cdot par

$$(x, y) + (x', y') = (xx', y + y') \quad \text{et} \quad \lambda \cdot (x, y) = (x^\lambda, \lambda y)$$

Vérifier que $(E, +, \cdot)$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

11.12 Dans \mathbb{R}^3 , on donne :

$$F = \text{Vect}((0, 1, 1), (1, 0, 2)) \quad \text{et} \quad G = \text{Vect}((1, -2, 0), (1, 1, 3))$$

Montrer que $F = G$.

11.13 Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$.

Soit $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - 2y + z = 0\}$.

Vérifier la formule de Grassman.

11.14 Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$.

Soit $G = \text{Vect}((1, 1, 1))$.

Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans \mathbb{R}^3 .

11.15 Soit $E = \mathbb{R}^3$.

- Soit $F = \text{Vect}((0, 1, 1), (1, 0, 2))$. Trouver un vecteur $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ tel que $F \oplus \text{Vect}(\vec{x}) = E$.
- Même question avec $F = \text{Vect}((1, 2, 3), (2, 2, 0))$.

11.16 Soit $E = \mathbb{R}^3$.

- Soit $F = \text{Vect}((1, 2, 2))$. Trouver deux vecteurs \vec{x} et \vec{y} de \mathbb{R}^3 tels que $F \oplus \text{Vect}(\vec{x}, \vec{y}) = E$.
- Même question avec $F = \text{Vect}((1, 0, 1))$.

11.17 Soit E l'espace vectoriel des fonctions définies sur \mathbb{R} .

On note F le sev des fonctions paires de E et G le sev des fonctions impaires de E .

Montrer que $E = F \oplus G$.