

08.1 Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} et calculer sa dérivée.

08.2 Soit f une fonction dérivable sur \mathbb{R} .

Montrer que si f est paire, alors sa dérivée est impaire.

08.3 On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{2 + 3 \ln(x)}{1 - \ln(x)}$$

- Démontrer que f réalise une bijection de $]e, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
- Déterminer $f^{-1}(-4)$. Justifier que f^{-1} est dérivable en -4 et calculer $(f^{-1})'(-4)$.

08.4

- Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+, \sin(x) \leq x$
- Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2}$.

08.5 Déterminer les limites suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} 1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\cos(x)} - e}{\tan(x) \sin(3x)} \\ 2. \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(e^{1/x} - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 + \sin(x)} - \sqrt{1 - \sin(x)}}{\tan(x)} \\ 4. \lim_{x \rightarrow \pi/2} (1 - \sin(x)) \tan^2(x) \end{array}$$

08.6 Montrer que

$$\forall x \in [-1, 1], \operatorname{Arcsin}(x) + \operatorname{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2}$$

08.7 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

08.8 Montrer que la fonction

$$f : x \mapsto 2\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right) + \operatorname{Arctan}(x)$$

est constante sur \mathbb{R} et déterminer sa valeur.

08.9 Pour chacune des fonctions suivantes, donner l'ensemble de définition, les symétries de f (parité, périodicité), se ramener dans lequel l'expression de la fonction est simple, et en déduire la courbe

- $f(x) = \cos(\operatorname{Arccos}(x))$
- $g(x) = \sin(\operatorname{Arcsin}(x))$
- $h(x) = \tan(\operatorname{Arctan}(x))$
- $u(x) = \operatorname{Arccos}(\cos(x))$
- $v(x) = \operatorname{Arcsin}(\sin(x))$
- $w(x) = \operatorname{Arctan}(\tan(x))$

08.10 Pour chacune des fonctions suivantes, donner l'ensemble de définition et la simplifier en une expression en racines (n'utilisant plus de fonction trigonométrique ni réciproque)

- $f(x) = \sin(\operatorname{Arccos}(x))$
- $g(x) = \cos(\operatorname{Arcsin}(x))$
- $h(x) = \tan(\operatorname{Arcsin}(x))$
- $u(x) = \cos(\operatorname{Arctan}(x))$
- $v(x) = \sin(\operatorname{Arctan}(x))$