

**06.1** On veut démontrer que la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$

tend vers 0 lorsque  $x \rightarrow +\infty$  (i.e. on veut redémontrer les résultats du cours appelés "croissances comparées").

- Déterminer le domaine de définition de la fonction  $f$  et son domaine de dérivabilité.
-  tudier les variations de la fonction  $f$
- Montrer que  $f$  admet une limite finie  $\ell$  en  $+\infty$ .
- Montrer que  $\ell \geq 0$ .
- En écrivant  $f(2x)$  de deux façons différentes, déterminer  $\ell$ .
- Déterminer la limite en  $0^+$  de  $x \ln(x)$
- Déterminer la limite en  $+\infty$  de  $\frac{x}{e^x}$ ,
- Déterminer la limite en  $-\infty$  de  $xe^x$ .

**06.2** Pour  $a > 0$  et  $b > 0$  fixés, on considère la fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$  par

$$f(x) = \frac{x}{a} \text{Ent} \left( \frac{b}{x} \right)$$

- Montrer que pour tout réel  $t$ , on a  $t - 1 < \text{Ent}(t) \leq t$ .
- En déduire les limites de  $f(x)$  en  $0^+$  et  $0^-$ . Qu'en déduire ?
- Déterminer les limites de  $f(x)$  en  $+\infty$  et  $-\infty$ .

**06.3** Calculer les limites des expressions suivantes aux points indiqués.

- $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1}$  en 1 et  $+\infty$
- $\frac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}}$  en 0

- $\frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x^2 + \sqrt{x^2 + 1}}$  en  $+\infty$
- $\frac{1}{x}(\sqrt{x+1} - x - 1)$  en  $+\infty$
- $\frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{2}}{x - 1}$  en 1
- $\frac{x - 9}{\sqrt{x} - 3}$  en 9
- $\sqrt{|\ln(x)|}$  en  $0^+$
- $\frac{x}{|x + 2|}$  en  $-2$
- $\text{Ent}(x) \ln(x)$  en  $0^+$
- $\frac{\text{Ent}(x)}{x}$  en 0 et  $+\infty$
- $\sqrt{x} \ln \left( \frac{x^2}{1+x} \right)$  en  $0^+$  et  $+\infty$
- $(x - 2) \ln(x^2 - x - 2)$  en  $2^+$
- $x^2 e^{-e^x}$  en  $+\infty$
- $e^{-1/x} \ln(x)$  en  $0^+$
- $e^x \ln(x^2 + x)$  en  $-\infty$
- $(1+x)^{1/x}$  en  $+\infty$
- $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$  en  $0^+$
- $\left(\frac{e^x}{x}\right)^{1/x}$  en  $+\infty$
- $x^{\ln(x)}$  en  $0^+$
- $\frac{(-1)^{\text{Ent}(x)}}{\sqrt{x}}$  en  $+\infty$

**06.4** Déterminer un équivalent simple et la limite des expressions suivantes au point indiqué :

1.  $\frac{\ln(1+x^2)}{x}$  en 0
2.  $\frac{1}{x} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$  en 0
3.  $\frac{\ln(x-1)}{x-2}$  en 2
4.  $\frac{\ln(2+x) - \ln(2)}{\exp(\sqrt{1+x}) - e}$  en 0
5.  $\frac{x-1}{x^n - 1}$  en 1 ( $n \in \mathbb{N}^*$ )
6.  $\frac{\ln(4x^2 - 2x + 1)}{x}$  en 0 et  $+\infty$
7.  $\frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{x^2 - \sqrt{x^2 + 1}}$  en  $-\infty$
8.  $\frac{x^x - 1}{\ln(1 - \sqrt{x^2 - 1})}$  en  $1^+$
9.  $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}$  en  $+\infty$

**06.5** Calculer les limites des expressions suivantes aux points indiqués.

1.  $x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$  en  $+\infty$
2.  $\frac{\sqrt{1+x} - 1}{e^x - 1}$  en 0
3.  $\frac{\ln(2-x^2)}{x-1}$  en 1
4.  $(1+x^2)^{\ln(x)/x}$  en  $0^+$
5.  $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$  en  $+\infty$
6.  $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2/2}$  en  $+\infty$  et  $-\infty$

7.  $\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x/2}$  en  $+\infty$
8.  $\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}\right)^{x \ln(x)}$  en  $1^+$  et  $+\infty$
9.  $\frac{\ln(x+1)}{e^x - \sqrt{1+x}}$  en 0

**06.6** Étudier la continuité en 0 des fonctions définies respectivement sur  $\mathbb{R}$  et sur  $\mathbb{R}^+$  :

1.  $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+e^{1/x})}{e^{1/x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
2.  $g(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x^x - 1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

**06.7** Étudier les branches infinies des fonctions suivantes aux bornes de leur domaine de définition.

1.  $f_1(x) = \frac{x^2}{x-1}$
2.  $f_2(x) = \frac{x^2 + 5}{2x + 1}$
3.  $f_3(x) = x + \sqrt{x^2 + x + 1}$
4.  $f_4(x) = e^{-x} - 2x + 1$
5.  $f_5(x) = x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$
6.  $f_6(x) = \frac{xe^x}{e^x + 1}$
7.  $f_7(x) = \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$
8.  $f_8(x) = \frac{x^2 + \ln(|x|)}{|x|}$