05.1 Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes, préciser leur domaine de dérivabilité et calculer leur dérivée là où elle existe :

1. $f : x \mapsto \sqrt{2x^2 + 3x + 1}$
2. $g : x \mapsto \sqrt{\dfrac{2x+3}{x^2-5}}$
3. $h : x \mapsto \ln(\ln(|x|))$
4. $u : x \mapsto \ln^3(x)$
5. $v : x \mapsto \ln\left|\dfrac{x}{x^2-1}\right|$
6. $w : x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x}}$
7. $z : x \mapsto x\sqrt{-\ln(x)}$

05.2 Représenter sur un même graphique (utiliser des couleurs) les courbes des fonctions :

$$x \mapsto 1, x \mapsto x,\ x \mapsto x^2,\ x \mapsto x^3,\ x \mapsto \sqrt{x},\ x \mapsto \frac{1}{x}$$

05.3 Soit $\alpha > 0$. Tracer l'allure de la courbe des fonctions

$$f : x \mapsto e^{\alpha x} \qquad \text{et} \qquad g : x \mapsto e^{-\alpha x}$$

05.4 Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1-e^x}{1+e^x}$. Déterminer le domaine de définition D_f de la fonction f, puis montrer que f est impaire sur D_f.

05.5 Etudier les axes et centres de symétrie des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \frac{x^2 - 5x - 7}{x-1}, \quad f_2(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

05.6 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f \circ f$ soit croissante sur $\mathbb{R}$ et $f \circ f \circ f$ soit strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
Montrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

05.7 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) \leqslant 1 - \frac{1}{x^2}$$

Justifier que f est majorée sur $\mathbb{R}$.

05.8 Soient les fonctions f et g définies sur $[0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{-x}{1+x}, \quad g(x) = \frac{\cos(x)}{2+x}$$

Montrer que les fonctions f et g sont bornées.

05.9 Soit la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = -\dfrac{x}{1+x}$.

1. Sur $[0, +\infty[$ la fonction f admet-elle un maximum ? un minimum ?
2. Montrer que f est bornée sur $[0, +\infty[$. Déterminer ses bornes inférieures et supérieures.

05.10 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation

$$|2x+1| + |1-x| \leqslant 3$$

05.11 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Ent}(x+1) = \mathrm{Ent}(x) + 1$.

05.12 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $\ln\left(\sqrt{2x-3}\right) = \ln(6-x) - \dfrac{1}{2}\ln(x)$
2. $e^{2x-1} - \sqrt{e^{2x+2}} - 2e^3 = 0$
3. $\ln(|2x+1|) \leqslant 1$