02.1 Posons $E = \{1,2\}$. Déterminer $\mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$. De même pour $E = \{\{1,2\}\}$.

02.2 Soit E un ensemble et A et B deux parties de E. Simplifier l'expression de $(A \cap^c B) \cup (A \cap B)$

02.3 Soient E, F, G, H quatre ensembles finis. Déterminer une formule donnant $Card(E \cup F \cup G \cup H)$ en fonction des cardinaux de E, F, G, H ainsi que de leurs intersections.
Généralisation : Soient $E_1, \dots, E_n$ n ensembles finis. Déterminer une formule donnant $Card(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n)$.

02.4 À partir de combien d'élèves est-on sûr de trouver deux élèves portant les mêmes initiales dans un lycée ? (Chaque élève a deux initiales pour Prénom et Nom).

02.5 Un ascenseur dessert 8 étages. Six personnes le prennent au rez-de-chaussée. Dénombrer les cas où :

1. deux personnes au moins descendent au même étage.
2. deux personnes descendent au même étage, les autres descendent chacune à des étages différents, différents du précédent.
3. une personne descend à un étage, 2 à un autre et 3 à un autre.

02.6 La classe de 813 comporte 17 garçons et 26 filles.

1. Combien y a-t-il de manières d'installer tous les élèves dans une salle comportant 50 places ?
2. Le professeur désigne au hasard deux élèves qui seront les délégués provisoires.
   Combien y a-t-il de choix possibles ? Parmi ces choix, combien y en a-t-il pour lesquels les deux élèves sont du même sexe ?

02.7 On tire successivement avec remise n boules dans une urne contenant $2n$ boules numérotées de 1 à $2n$. Déterminer le nombre de tirages amenant n numéros dans l'ordre strictement croissant.

02.8 Un gardien de zoo donne à manger à ses 13 singes.

1. Il ditribue 8 fruits différents. Combien y a-t-il de distributions possibles s'il donne au plus un fruit à chaque signe ? si chaque singe peut recevoir de 0 à 8 fruits ?
2. Mêmes questions si les 8 fruits sont des oranges identiques.

02.9 Une entreprise de n personnes doit désigner en son sein une délégation de p membres pour les affaires internationales, dont une personne doit être le porte-parole (PP)

1. On désigne d'abord la délégation, puis le porte-parole parmi la délégation. Combien y a-t-il de choix de délégation+PP ?
2. On désigne d'abord le porte-parole, puis les personnes qui l'accompagnent dans la délégation. Combien y a-t-il de choix délégation+PP ?
3. Démontrer que $p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$.

02.10 Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{2^k}{3^{n+1-k}}$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} 3^k$
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} 2^k$
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{3^{k-1}}$
6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{n-k}}{3^{k+1}}$

02.11 Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que pour $k > p$, $\binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}$.
En déduire que pour $n \geqslant p$, on a $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.
Application : Calculer $\displaystyle\sum_{k=4}^{20} k(k-1)(k-2)(k-3)$.