Soutien du 28 avril

On rappelle que, lorsque x est au voisinage de 0, on a :

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \\
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)
\end{aligned}$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)$$

Plus généralement, la formule de **Taylor-Young** donne que :
si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{6}x^3 + o(x^3)$$

1. Ecrire les $DL_3(0)$ des fonctions suivantes :

a) $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$

b) $\frac{1}{2-x+x^2}$.

c) $(\ln(1+x))^2$

2. Si on sait que f est C^∞ et que

$$f(x) = 1 + \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}x^3 + o(x^3).$$

Déterminer les valeurs de $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ et $f^{(3)}(0)$.

3. Écrire le développement asymptotique de $x\cos(\frac{1}{x})$ au voisinage de $+\infty$. On donnera 2 termes.
4. Retrouver les DL suivants au voisinage de 0:

$$\cos(x)\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{5}{8}x^2 + o(x^2)$$

$$\sin(x)\exp(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\sqrt{1+\sqrt{1+x}} = \sqrt{2} + \frac{1}{8}\sqrt{2}x - \frac{5}{128}\sqrt{2}x^2 + o(x^2)$$

$$\ln(1+\sin^2 x) = x^2 - \frac{5}{6}x^4 + o(x^4)$$

Soutien du 28 avril : Corrigé

1. a) Par addition et composition des DL usuels on a :

$$2-\frac{x^2}{4}+o(x^3)$$

b) Par composition des DL on a :

$$\frac{1}{2-x+x^2}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}}$$

$=\frac{1}{2}\left(1+\left(\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2}\right)+\left(\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2}\right)^2+\left(\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2}\right)^3\right)+o(x^3)$

$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2}+\left(\frac{x}{2}\right)^2-2\frac{x}{2}\frac{x^2}{2}+\left(\frac{x}{2}\right)^3\right)+o(x^3)$

$=\frac{1}{2}+\frac{x}{4}-\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{16}x^3+o(x^3)$

c) $(\ln(1+x))^2=\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)^2$

$=x^2\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)\right)^2$

$=x^2\left(1+2\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}\right)+\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}\right)^2+o(x^2)\right)$

$=x^2\left(1-x+\frac{11x^2}{12}+o(x^2)\right)$

$=x^2-x^3+o(x^3)$

<u>Remarque :</u> Cette technique est un peu compliquée car la puissance est entière, on peut plus simplement dans ce cas-là développer le carré, on retrouve immédiatement la réponse. Lorsque la puissance n'est pas entière il faudra composer les DL (pour une racine carré par exemple).

2. D'après le théorème de Taylor Young, on a :
$f(0)=1$; $f'(0)=0$; $\frac{f^{(2)}(0)}{2!}=\frac{1}{2}$ et $\frac{f^{(3)}(0)}{3!}=\frac{-1}{2}$

Donc $f^{(2)}(0)=1$ et $f^{(3)}(0)=-3$

3. Par composition, puisque $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, on a :

$$x\cos\left(\frac{1}{x}\right)=x\left(1-\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$
$$=x-\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

4. Par produit ou composition.