Soutien du 28 avril

On rappelle que, lorsque x est au voisinage de 0, on a :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)$$

Plus généralement, la formule de **Taylor-Young** donne que :
si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{6}x^3 + o(x^3)$$

1. Écrire les $DL_3(0)$ des fonctions suivantes :

a) $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$

b) $\frac{1}{2-x+x^2}$.

c) $(\ln(1+x))^2$

2. Si on sait que f est C^∞ et que

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3).$$

Déterminer les valeurs de $f(0); f'(0); f''(0)$ et $f^{(3)}(0)$

3. Écrire le développement asymptotique de $x\cos(\frac{1}{x})$ au voisinage de $+\infty$. On donnera 2 termes.
4. Retrouver les DL suivants au voisinage de 0:

$$\cos(x)\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{5}{8}x^2 + o(x^2)$$
$$\sin(x)\exp(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\sqrt{1+\sqrt{1+x}} = \sqrt{2} + \frac{1}{8}\sqrt{2}x - \frac{5}{128}\sqrt{2}x^2 + o(x^2)$$
$$\ln(1+\sin^2 x) = x^2 - \frac{5}{6}x^4 + o(x^4)$$

Soutien du 28 avril : Corrigé

1. a) Par addition et composition des DL usuels on a :
$$2-\frac{x^2}{4}+o(x^3)$$
b) Par composition des DL on a :
$$\frac{1}{2-x+x^2}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}}$$
(en posant u $=\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2}$ et en développant $\frac{1}{1-u}$)
$=\frac{1}{2}\left(1+\left(\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2}\right)+\left(\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2}\right)^2+\left(\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2}\right)^3\right)+o(x^3)$
$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2}+\left(\frac{x}{2}\right)^2-2\frac{x}{2}\frac{x^2}{2}+\left(\frac{x}{2}\right)^3\right)+o(x^3)$
$=\frac{1}{2}+\frac{x}{4}-\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{16}x^3+o(x^3)$
Remarque :
On peut aussi poser u $=-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}$ et développer $\frac{1}{1+u}$

c) $(\ln(1+x))^2 = \left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)^2$
$= x^2-2x\frac{x^2}{2}+o(x^3)$
$= x^2-x^3+o(x^3)$

Remarque : on a utilisé $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$

2. D'après le théorème de Taylor Young, par identification des coefficients, on a :
$f(0)=1$; $f'(0)=0$; $\frac{f^{(2)}(0)}{2!}=\frac{1}{2}$ et $\frac{f^{(3)}(0)}{3!}=\frac{-1}{2}$

Donc $f^{(2)}(0)=1$ et $f^{(3)}(0)=-3$

3. Par composition, puisque $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, on a :
$$x\cos\left(\frac{1}{x}\right)=x\left(1-\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$
$$=x-\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

4. Par produit ou composition en faisant attention à l'ordre attendu
Remarque : Pour ln(1+$\sin^2(x)$) , on développe sin(x) à l'ordre 4 puis on élève au carré, on a : $\sin^2(x) = x^2-2\frac{x^4}{3}+o(x^4)$. Il suffit alors d'écrire ln(1+u) $= u-\frac{u^2}{2}+o(u^2)$