Session du 17/02/20 : CORRIGÉ

Exercice 2 :

(1) Les applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont de la forme $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ax$ où $a \in \mathbb{R}$.

Disjonction de cas : <u>Si $b \neq 0$</u> alors f n'est pas linéaire car $f(0) = b \neq 0$.

<u>Si $b = 0$</u> alors f est linéaire

<u>1er sous cas</u> Si $a \neq 0$ alors f est injective et surjective donc bijective. $\ker(f) = \{0\}$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$ en effet $\forall y \in \mathbb{R}$ $\exists! x = \frac{y}{a}$ tel que $f(x) = y$.

<u>2e sous cas</u> Si $a = 0$ alors $\mathrm{Im}(f) = \{0\}$ donc $\ker(f) = \mathbb{R}$ et f est ni surjective ni injective.

(2) $f(0) = 1 \neq 0$ donc f n'est pas linéaire

(3) Soient $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ et $v = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors

$$\begin{aligned} f(\lambda u + v) &= (0, 2(\lambda x + x') + \lambda y + y', \lambda x + x' + 3(\lambda y + y')) \\ &= (0, \lambda(2x + y) + 2x' + y', \lambda(x + 3y) + x' + 3y') \\ &= \lambda f(x, y) + f(x', y') \\ &= \lambda f(u) + f(v) \end{aligned}$$

donc f est linéaire.

La matrice canoniquement associée à f est $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Ces vecteurs colonnes forment une famille libre de $\mathbb{R}^3$ car ils ne sont pas colinéaires. $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$ est donc de dimension 2. f n'est pas surjective.

Avec le Th. du rang on a $\dim \ker(f) + \dim \mathrm{Im} f = 2$ donc $\dim \ker(f) = 0$ et $\ker(f) = \{0\}$. f est injective.

Exercice 3

$\boxed{\text{Partie A}}$

On sait que $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vérifie $p^2 = p$
$q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vérifie $q^2 = q$
et que $p \circ q = q \circ p$.

1) On a bien $p \circ q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et
$$\begin{aligned}(p\circ q)^2 &= (p\circ q)\circ(p\circ q)\\ &= p\circ(q\circ p)\circ q\\ \text{p et q commutent} \longrightarrow &= p\circ(p\circ q)\circ q\\ &= p^2\circ q^2\\ &= p\circ q\end{aligned}$$
donc $p\circ q$ est bien un projecteur.

2) Montrons $\mathrm{Im}(p\circ q) \subset \mathrm{Im}(p)$

EVIDENT : Soit $y \in \mathrm{Im}(p\circ q)$ alors $\exists x \in \mathbb{R}^n / \ y = p\circ q(x) = p(\underbrace{q(x)}_{\in \mathbb{R}^n})$
donc $y \in \mathrm{Im}(p)$

Montrons $\mathrm{Im}(p\circ q) \subset \mathrm{Im}(p)$

EVIDENT : Soit $y \in \mathrm{Im}(p\circ q)$ alors $\exists x \in \mathbb{R}^n / \ y = p\circ q(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{p et q commutent}}}{=} q\circ p(x) = q(\underbrace{p(x)}_{\in \mathbb{R}^n})$
donc $y \in \mathrm{Im}(q)$.

Montrons $\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q) \subset \mathrm{Im}(p\circ q)$

Soit $y \in \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}\, q$ alors $\exists x, w \in \mathbb{R}^n / \ p(x) = y$ et $q(w) = y$
Il vient $p(y) = p^2(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{p projecteur}}}{=} p(x) = y$ et par ailleurs $p(y) = p(q(w))$
alors $y = p\circ q(w) \in \mathrm{Im}(p\circ q)$.

3) Montrons $\mathrm{Ker}(p\circ q) \subset \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(q)$

Soit $x \in \mathrm{Ker}(p\circ q)$ alors $p\circ q(x) = 0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{p et q commutent}}}{\overset{(*)}{=}} q\circ p(x)$

ainsi $q(x) \in \mathrm{ker}(p)$

et $x = x - q(x) + q(x)$

Montrons que $x - q(x) \in \mathrm{ker}(q)$: on a $q(x - q(x)) = q(x) - q^2(x)$
$$q^2 = q \longrightarrow = 0$$

On a donc trouvé une décomposition de x dans $\mathrm{ker}(p) + \mathrm{ker}(q)$
toutefois elle n'est pas unique car on a aussi $x = x - p(x) + p(x)$
où $x - p(x) \in \mathrm{ker}(p)$ et $p(x) \in \mathrm{ker}(q)$ d'après $(*)$

Montrons $\mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(q) \subset \mathrm{Ker}(p\circ q)$

Soit $x \in \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(q)$ alors $\exists\ x_1 \in \mathrm{Ker}(p)$ et $x_2 \in \mathrm{Ker}(q)$
tel que $x = x_1 + x_2$.

On a $p\circ q(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{poq linéaire}}}{=} p\circ q(x_1) + p\circ q(x_2) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{p et q commutent}}}{=} q(\underbrace{p(x_1)}_{0}) + p(\underbrace{q(x_2)}_{0}) = 0$ CQFD.

PARTIE B

1) Calculons $(3p-q)^2 - 2(3p-q) - 3id$

$= (3p-q)\circ(3p-q) - 6p + 2q - 3id$

$id = p+q \longrightarrow = 9p^2 - 3p\circ q - 3q\circ p + q^2 - 6p + 2q - 3(p+q)$

p et q projecteurs $\rightarrow = 9p - 3p\circ q - 3q\circ p + q - 6p + 2q - 3p - 3q$

$= \cancel{3p} - 3p\circ q - 3q\circ p + \cancel{3q} - \cancel{3p} - \cancel{3q}$

$\left.\begin{array}{l} q = id - p \\ p = id - q \end{array}\right\} \longrightarrow = -3p\circ(id-p) - 3q\circ(id-q)$

$= -3p + 3p^2 - 3q + 3q^2$

p et q projecteurs $\rightarrow = 0$

2) On a $f^2 - 2f = 3id$

$\Leftrightarrow f(f-2id) = 3id$

Ainsi f est bijectif et $f^{-1} = \frac{1}{3}(f - 2id)$

PARTIE C la plus facile

On a bien $id - p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $(id-p)^2 = id^2 - 2p + p^2$

p projecteur $\rightarrow = id - 2p + p$

$= id - p$

donc $id - p$ est bien un projecteur de $\mathbb{R}^n$.

PARTIE D

2) Pour $M(a,b) \in \mathbb{R}^2$
on cherche le point d'intersection entre la droite parallèle à (d') qui passe par M et (d). Notons (x,y) ses coordonnées.
On sait que $y = \frac{x}{2}$.
La parallèle à (d') qui passe par M a pour équation $y = -x + a + b$

Ainsi $\frac{x}{2} = -x + a + b \Leftrightarrow x = 2\frac{a+b}{3}$

et $y = \frac{x}{2} = \frac{a+b}{3}$

Donc $\varphi(a,b) = \left(\frac{2}{3}a + \frac{2}{3}b ; \frac{a}{3} + \frac{b}{3}\right)$

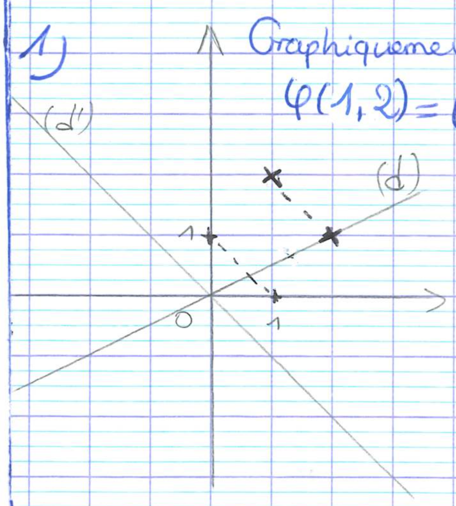
On vérifie facilement que φ est linéaire.

3) $\mathrm{Im}\,\varphi = d$

$\mathrm{Ker}\,\varphi = d'$

Car φ est la projection sur d parallèlement à d'. (cf figure de la question 1)

1) Graphiquement on trouve : $\varphi(1,2) = (2,1)$



Exercice 4

ANALYSE

Soit $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

on a $AB = \begin{pmatrix} \alpha a + b\gamma & a\beta + b\delta \\ \gamma b & \delta a \end{pmatrix}$

et $BA = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b + \beta a \\ \gamma a & b\gamma + \delta a \end{pmatrix}$

Si $AB = BA$ alors $\begin{cases} b\gamma = 0 \\ \gamma a = \gamma b \\ b\alpha = b\delta \end{cases}$

or a et b sont non nuls donc $\begin{cases} \gamma = 0 \\ \alpha = \delta \end{cases}$ et $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$

SYNTHESE

Soit $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

alors $AB = \begin{pmatrix} \alpha a & \beta a + \alpha b \\ 0 & \alpha a \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b + \beta a \\ 0 & \alpha a \end{pmatrix}$

donc A et B commutent.

Exercice 5

1) $\ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;/\; \begin{cases} 6x - 4y \boxed{-4z} = 0 \\ 5x - 3y - 4z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \right\}$

$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;/\; \begin{cases} 6x - 4y - 4z = 0 \\ -x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \right\}$ $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$

$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;/\; \begin{cases} z = \frac{1}{2}x \\ x = y \end{cases} \right\}$

$= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ $\quad a = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient.

2) a) La matrice de f dans $\mathcal{B}$ s'écrit $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -4 \\ 5 & -3 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

c-à-d $f(e_1) = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad f(e_2) = -4e_1 - 3e_2 - e_3$ et $f(e_3) = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

alors $f(b) \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ linéaire}}}{=} f(e_1) + f(e_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2e_1 + 2e_2 = 2b$

et $f(c) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = e_2 - e_3 = c$.

b) D'après ce qui précède on a $c \in \mathrm{Im}(f)$ et $b \in \mathrm{Im}(f)$
Avec le th. du rang on sait que $\mathrm{rg}(f) = 3 - \dim\ker(f)$
$= 2$

c et b sont clairement non colinéaires donc (b, c) forme une famille libre de $\mathrm{Im}(f)$ qui est de dimension 2. C'est donc une base de $\mathrm{Im}(f)$.

3) $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(b, c) = \left\{ \begin{pmatrix} 2x \\ 2x+y \\ -y \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{R} \right\}$

$= \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \;/\; a - b - c = 0 \right\}$

Rq $\mathrm{Im}(f)$ étant un hyperplan de $\mathbb{R}^3$, une seule équation cartésienne le caractérise.

4) On peut montrer que
- $\mathrm{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0\}$

ou
- (b, c, a) est libre dans $\mathbb{R}^3$

ou
- $a \notin \mathrm{Vect}(b, c)$

Dans tous les cas la réponse est oui : $\mathrm{Im}(f)$ et $\ker(f)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$ et la matrice de f dans la base (b, c, a) s'écrit

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$