HKBL 07/04/2021

Exercices sur les séries

1° Calculer la somme des séries convergentes suivantes :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n+1}{4^n}$$
$$\sum_{n\geq 2} \frac{4^n}{n!}$$
$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(n+1)!}$$

2° Étudier la nature des séries de terme général

a) $\sin(\frac{1}{n^2})$
b) $1-\cos(\frac{\sqrt{n}-1}{n^2})$
c) $\ln(1+\frac{1}{n})$
d) $\frac{1}{1+\frac{1}{n}}$

Corrigé

1°

- Méthode 1 :

Pour $N \geq 1$, on a :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{n+1}{4^n} = \sum_{k=2}^{N+1} \frac{k}{4^{k-1}} = \sum_{k=1}^{N+1} \frac{k}{4^{k-1}} - 1$$

On reconnaît une série géométrique dérivée où $q = \frac{1}{4}$

Ainsi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{4^n} = \frac{1}{(1-\frac{1}{4})^2} - 1 = \frac{16}{9} - 1 = \frac{7}{9}$$

Méthode 2 (beaucoup plus longue) :

Pour $N \geq 1$, on a :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{n+1}{4^n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{n}{4^n} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{4^n}$$

On reconnaît une série géométrique dérivée et une série géométrique où $q = \frac{1}{4}$

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{4}\frac{1-(\frac{1}{4})^N}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}(1-\left(\frac{1}{4}\right)^N)$$

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{n}{4^n}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{N}\frac{n}{4^{n-1}}\to\frac{1}{4}\,\frac{1}{(1-\frac{1}{4})^2}=\frac{1}{4}\left(\frac{16}{9}\right)=\frac{4}{9}$$

Ainsi on retrouve :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+1}{4^n}=\frac{4}{9}+\frac{1}{3}=\frac{7}{9}$$

- On reconnaît une série exponentielle privée de ses deux premiers termes pour n = 0 et n = 1. On a donc :

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{4^n}{n!}=e^4-\frac{4}{1!}-\frac{1}{0!}=e^4-5$$

- Pour N$\geq$ 0, on a :

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{(n+1)!}=\sum_{k=1}^{N+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}=-\sum_{k=1}^{N+1}\frac{(-1)^k}{k!}$$

On reconnaît l'opposé d'une série exponentielle privée de son premier terme, on a donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)!}=-(e^{-1}-1)=\ -e^{-1}+1$$

2° a) Pour tout entier naturel non nul on a $\frac{1}{n^2}\in]0;1]\subset[0;\frac{\pi}{2}]$ donc on a une série à termes positifs et au voisinage de 0 on sait que $\sin(x)\sim x$ ainsi au voisinage de +∞ ; $\sin(\frac{1}{n^2})\sim\frac{1}{n^2}$

Puisque $\frac{1}{n^2}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente, on sait d'après le critère d'équivalence des suites positives que la série de terme général $\sin(\frac{1}{n^2})$ converge aussi.

b) On a bien une série à termes positifs et on sait qu'au voisinage de 0, on a : 1-cos$(x)\sim\frac{x^2}{2}$

ainsi au voisinage de +∞, on a : $1-\cos(\frac{\sqrt{n}-1}{n^2})\sim\frac{(\frac{\sqrt{n}-1}{n^2})^2}{2}\sim\frac{n}{2n^4}\sim\frac{1}{2n^3}$

Puisque $\frac{1}{2n^3}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente, on sait d'après le critère d'équivalence des suites positives que la série de terme général $1-\cos(\frac{\sqrt{n}-1}{n^2})$ converge aussi.

c) On a bien une série à termes positifs et on sait qu'au voisinage de 0, on a : ln(1+x)$\sim x$
ainsi au voisinage de +∞, on a : $\ln(1+\frac{1}{n})\sim\frac{1}{n}$

Puisque $\frac{1}{n}$ est le terme général d'une série de Riemann divergente, on sait d'après le critère d'équivalence des suites positives que la série de terme général $\ln(1+\frac{1}{n})$ diverge aussi.

d) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1\neq0$ donc la série de terme général $\frac{1}{1+\frac{1}{n}}$ diverge grossièrement.