

# Ensemble des parties d'un ensemble E

## Définition

Soit E un ensemble. On appelle **ensemble des parties** de E, l'ensemble  $\mathcal{P}(E)$ , défini par :

$$A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow A \subset E$$

Prenons  
comme  
exemple  
 $E = \{a, b\}$



$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, E\}$$

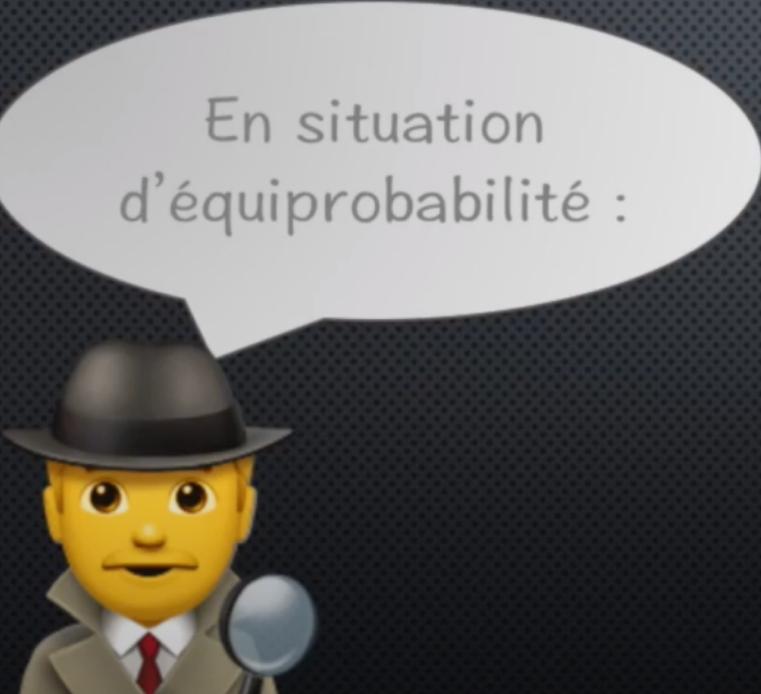
Le contraire d'une intersection est la réunion des contraires et réciproquement

Lois de De Morgan

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

# Pourquoi dénombrer?

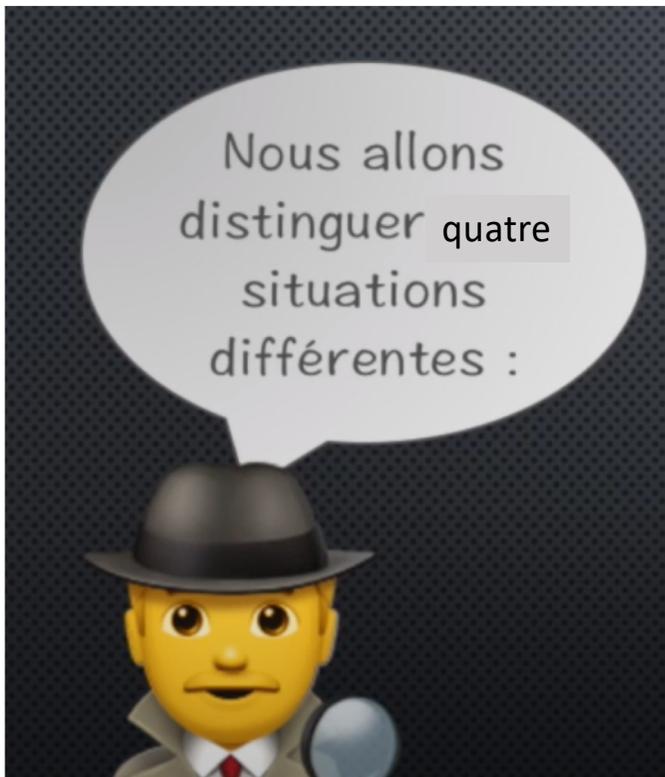


En situation  
d'équiprobabilité :

$$p(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega}$$

D'où l'importance du  
dénombrement !

# Comment dénombrer?



ordonnée	répétition	
<i>non</i>	<i>non</i>	$p$ -combinaison (sous-ensemble)
<i>oui</i>	<i>non</i>	$p$ -arrangement permutation $n$ -arrangement
<i>oui</i>	<i>oui</i>	$p$ -liste

Combinaison de  $p$  éléments dans un ensemble à  $n$  éléments (sans ordre et sans répétition)

## Théorème

Soit  $E$  un ensemble fini de cardinal  $n$ , le nombre de  $p$ -combinaisons de  $E$  est égal à :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p! (n - p)!}$$

Exemples de combinaisons: main au poker, tirage du loto, prélèvements simultanés



Exemple :  
une main  
au poker

*L'ordre ne compte pas.  
Il ne peut y avoir de répétition.*

K♠ K♦ K♣ K♥ 8♣

The image features a detective emoji on the left, wearing a brown trench coat, a red tie, and a black fedora, holding a magnifying glass. A speech bubble above the emoji contains the text 'Exemple : une main au poker'. To the right of the emoji, there is a hand of five playing cards: the King of Spades, the King of Diamonds, the King of Clubs, the King of Hearts, and the 8 of Clubs. Below the cards, there is a handwritten-style text in French: 'L'ordre ne compte pas. Il ne peut y avoir de répétition.'

# Arrangements (avec ordre mais sans répétition)

## Théorème

Soit  $E$  un ensemble fini de cardinal  $n$ , le nombre de  $p$ -arrangements ( $p \leq n$ ) de  $E$  est égal à :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemples d'arrangements: le tiercé, tirages successifs sans remise, anagrammes sans lettre commune



# Listes: avec ordre et répétition possible

## Définition

Soit  $E$  un ensemble fini de cardinal  $n$ , on appelle  **$p$ -liste** tout  $p$ -uplet de  $E$ , c'est-à-dire des objets de la forme :

$$(x_1, x_2, \dots, x_p)$$

Avec  $\forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, x_i \in E$

## Exemple de listes: code d'un cadenas

### Théorème

Soit  $E$  un ensemble fini de cardinal  $n$ , soit  $p$  un entier naturel non nul, alors le nombre de  $p$ -listes que l'on peut former avec des éléments de  $E$  est donné par :  $n^p$ .

# Première formule : probabilités composées

Maths+1

Une formule qui sert à calculer la probabilité de l'intersection.

La formule des probabilités composées (FPC).



Nous disposons  
de deux moyens  
de calculer  
 $p(A \cap B)$



$$p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$$
$$p(A \cap B) = p(B) \times p_B(A)$$

$$p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B)$$

Formule qu'on peut généraliser pour l'intersection de  $n$  événements:

**Proposition**

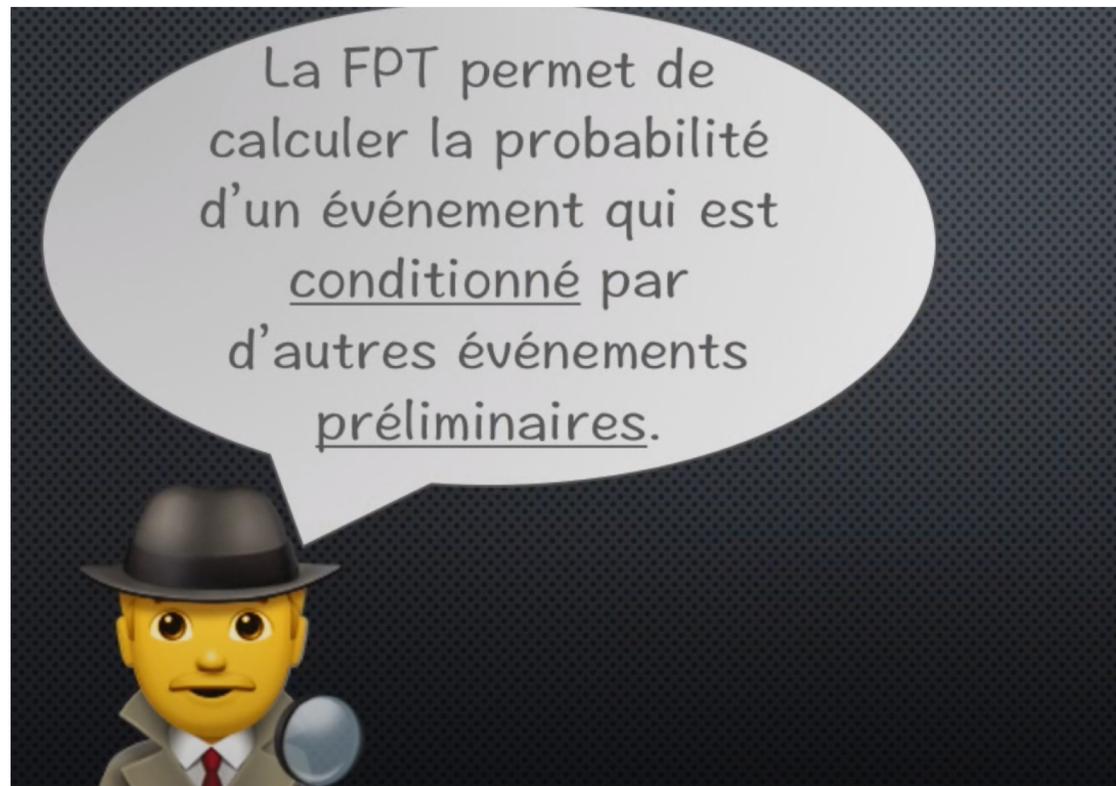
Soit  $(A_i)_{i \in [1;n]}$  une famille d'événements telle que :

$$p\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) \neq 0, \text{ alors :}$$

$$p\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) =$$

$$p(A_1) \times p_{A_1}(A_2) \times p_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \cdots \times p_{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

## Deuxième formule : probabilités totales



## Formule des probabilités totales (1)

Soit  $B$  un événement et soit  $A$  un événement non quasi impossible ( $p(A) \neq 0$ ) alors :

$$p(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B)$$

$$p(B) = p(A)p_A(B) + p(\bar{A})p_{\bar{A}}(B)$$

Formule qu'on peut généraliser:

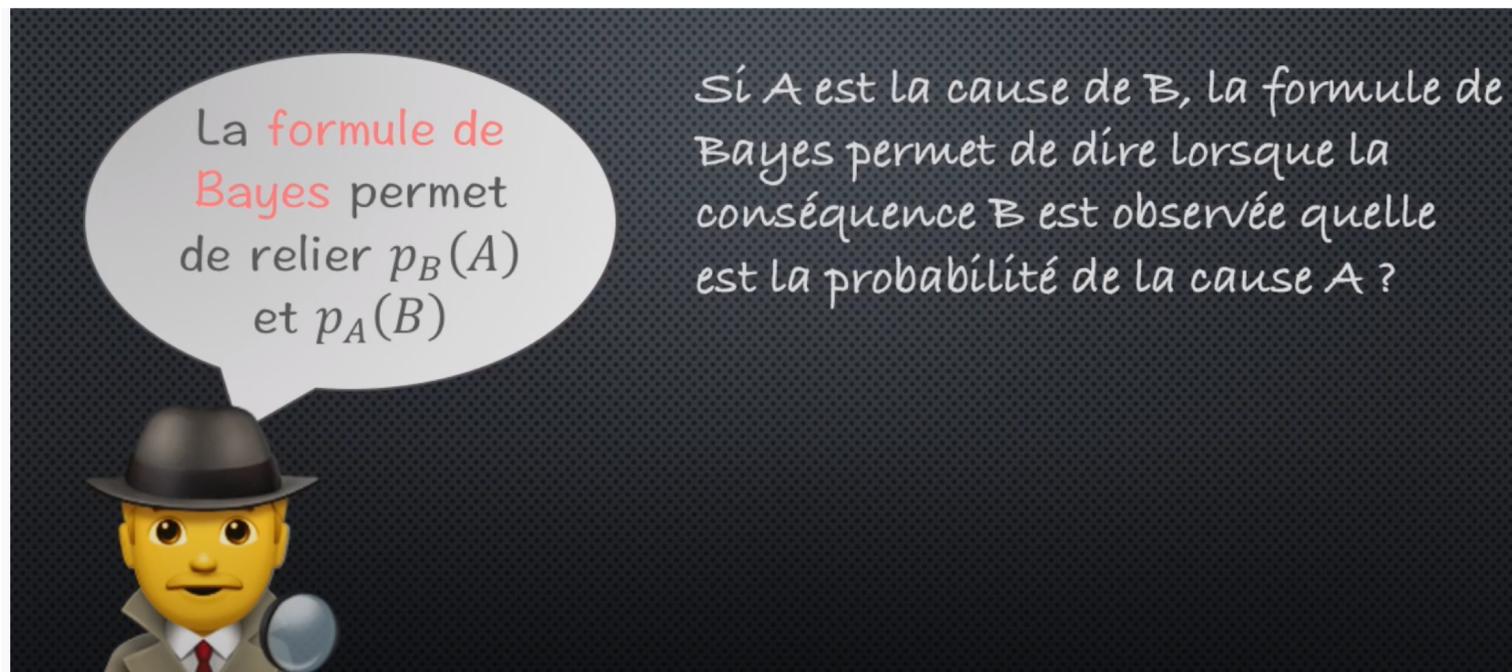
### Formule des probabilités totales (2)

Soit  $B$  un événement et soit  $(A_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$  un SCE dont aucun événement n'est quasi impossible ( $p(A_i) \neq 0$ ), alors :

$$p(B) = \sum_{i=1}^n p(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^n p(A_i) p_{A_i}(B)$$

## Troisième formule : formule de Bayes

Elle combine les 2 formules précédentes et permet de « remonter le temps » en calculant une probabilité conditionnelle inversée



## Formule de Bayes

On se donne un SCE  $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$  alors pour tout événement  $B$  de probabilité non nulle, on a :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, p_B(A_i) = \frac{p_{A_i}(B) \times p(A_i)}{\sum_{j=1}^n p(A_j) p_{A_j}(B)}$$