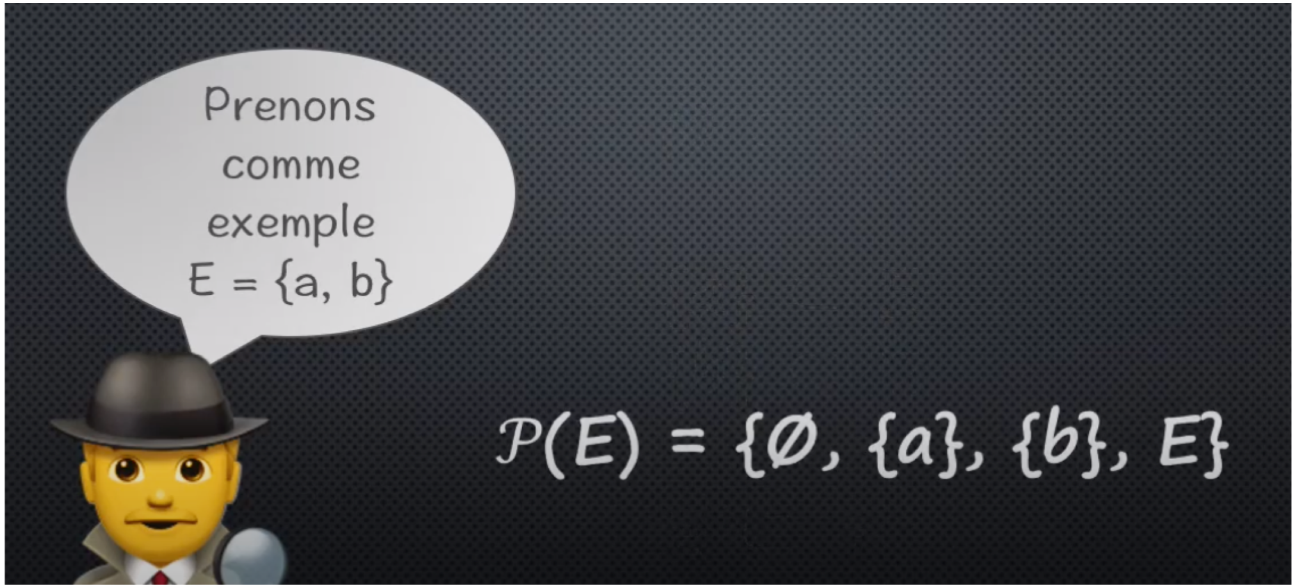
Ensemble des parties d’un ensemble E

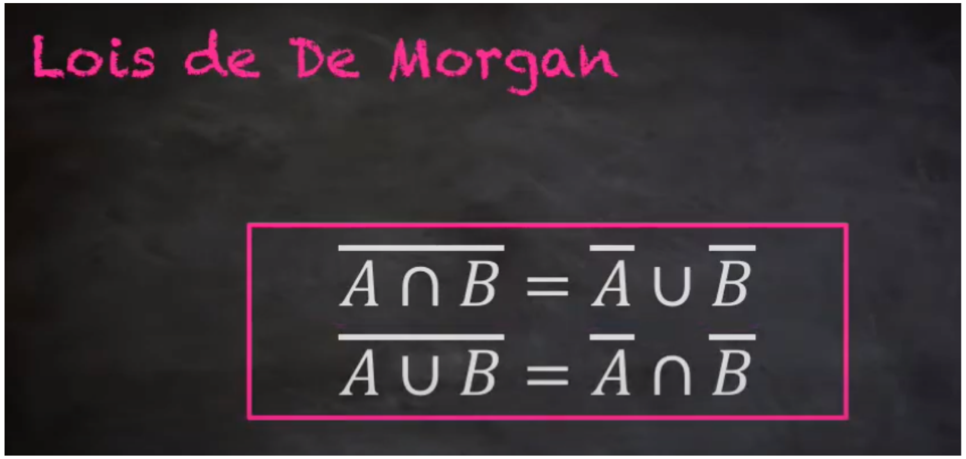
Définition

Soit E un ensemble. On appelle **ensemble des parties** de E, l’ensemble $\mathcal{P}(E)$, défini par :

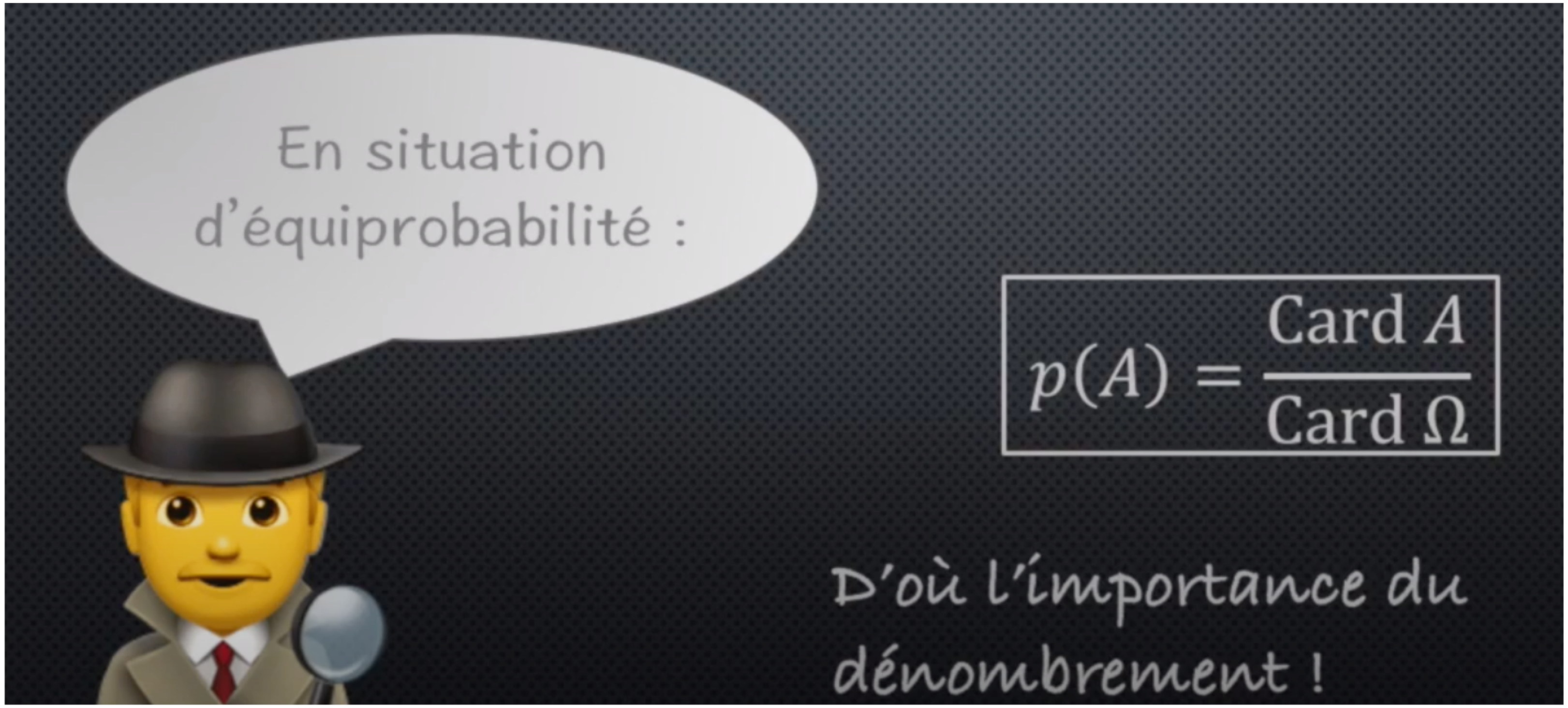
$$A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow A \subset E$$


Prenons comme exemple E = {a, b}
$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, E\}$

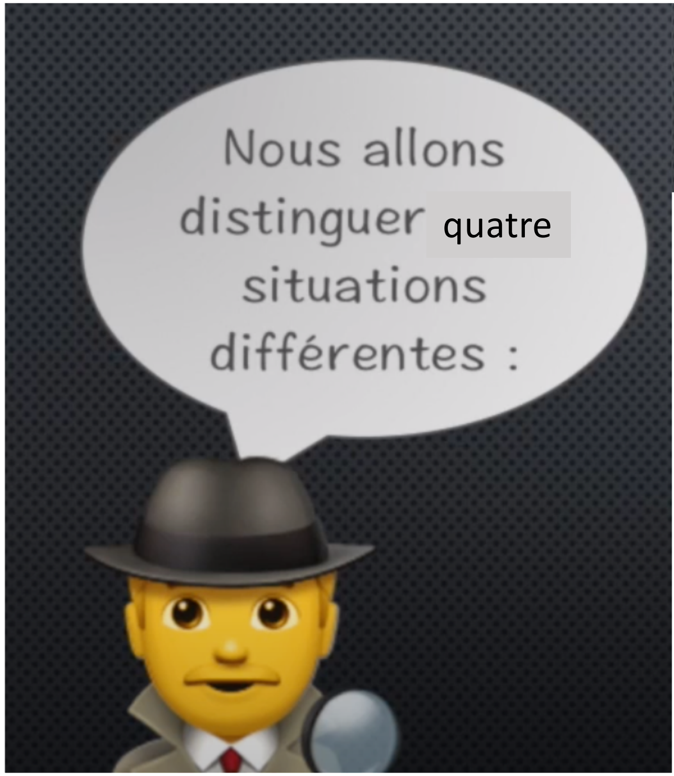
Le contraire d’une intersection est la réunion des contraires et réciproquement



Pourquoi dénombrer?

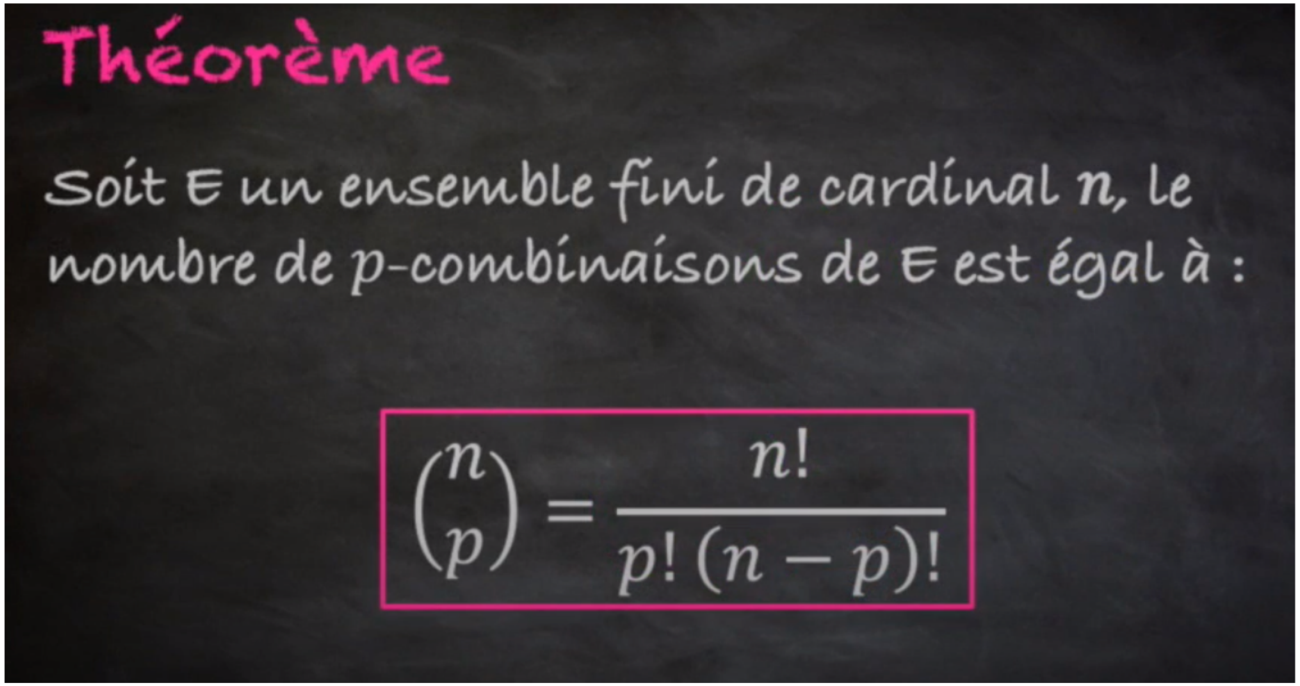


Comment dénombrer?



ordonnée	répétition	
non	*non*	p-combinaison (sous-ensemble)
oui	*non*	p-arrangement
		permutation n-arrangement
oui	*oui*	p-liste

Combinaison de p éléments dans un ensemble à n éléments (sans ordre et sans répétition)



Exemples de combinaisons: main au poker, tirage du loto, prélèvements simultanés

Arrangements (avec ordre mais sans répétition)

Théorème

Soit E un ensemble fini de cardinal n, le nombre de p-arrangements ($p \leq n$) de E est égal à :

$$\boxed{A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

Exemples d'arrangements: le tiercé, tirages successifs sans remise, anagramme sans lettre commune

Listes: avec ordre et répétition possible

Définition

Soit E un ensemble fini de cardinal n, on appelle *p-liste* tout p-uplet de E, c'est-à-dire des objets de la forme :

$$(x_1, x_2, \dots, x_p)$$

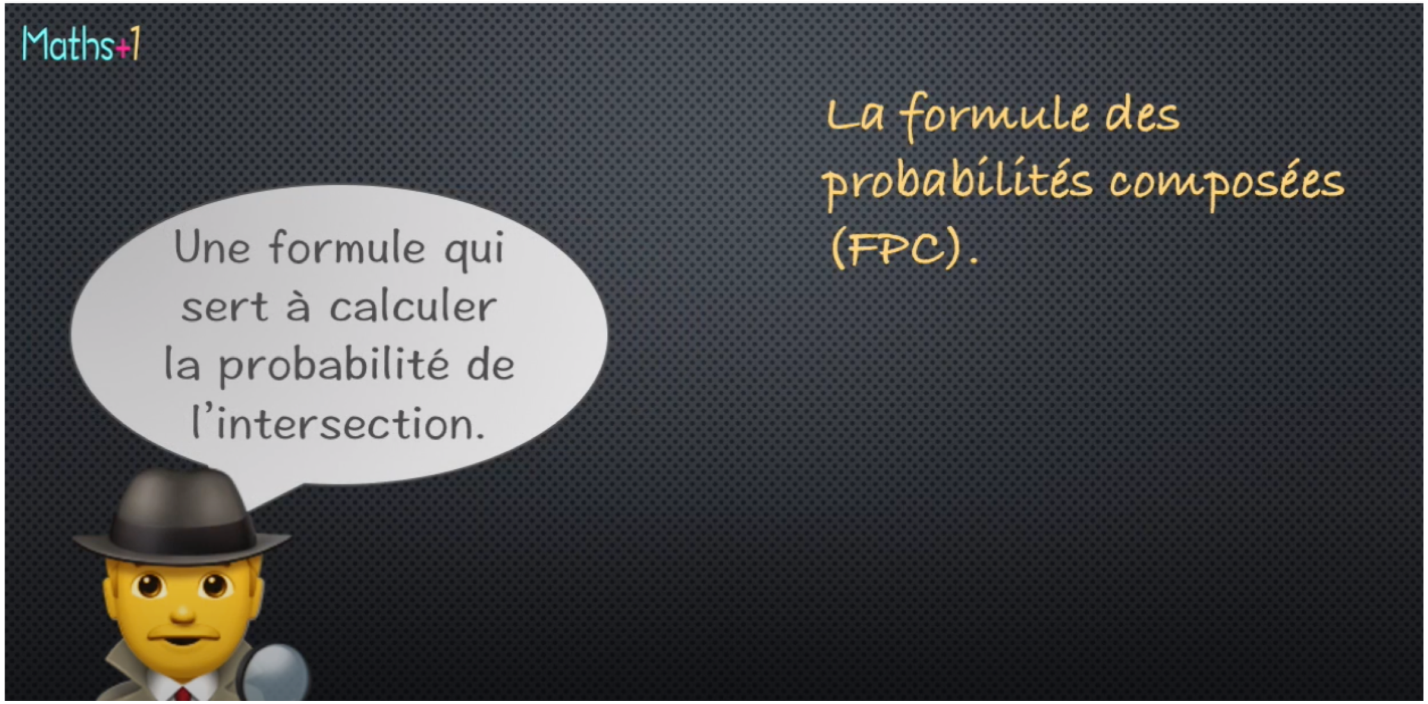
Avec $\forall i \in [\![1; p]\!], x_i \in E$

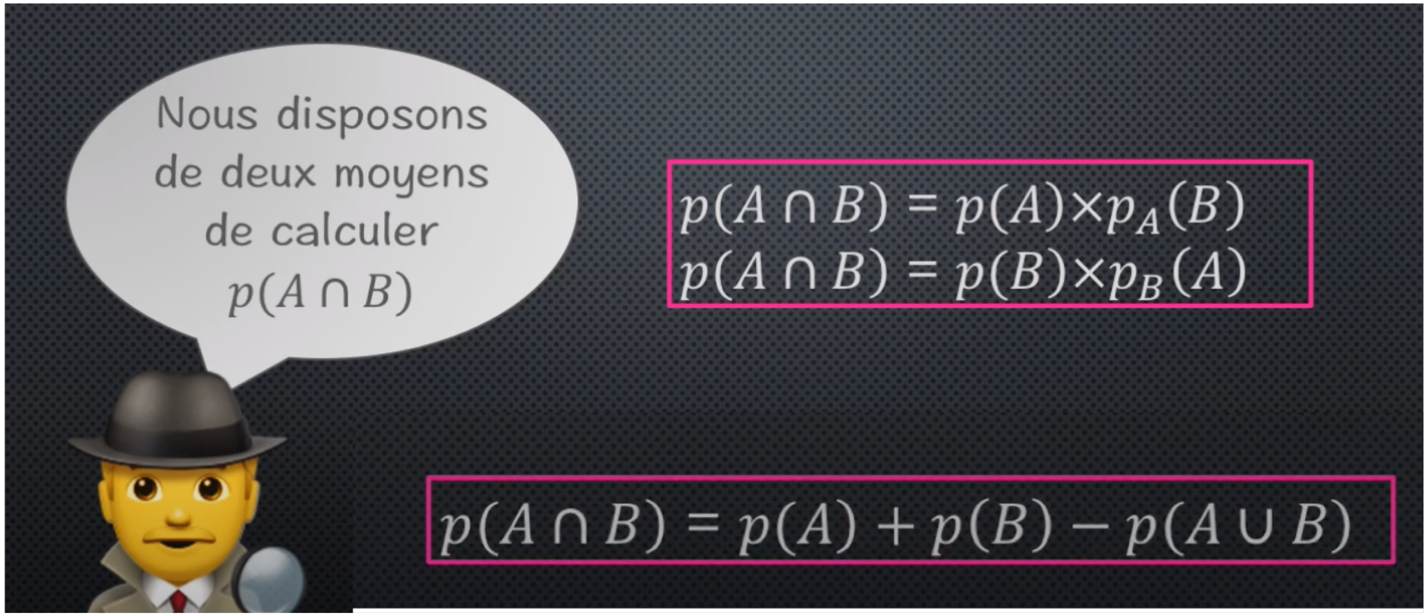
Théorème

Soit E un ensemble fini de cardinal n, soit p un entier naturel non nul, alors le nombre de p-listes que l'on peut former avec des éléments de E est donné par : n^p.

Exemples de liste: code d’un cadenas, anagramme sans lettre commune

Première formule : probabilités composées




Nous disposons de deux moyens de calculer $p(A \cap B)$
$p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$
$p(A \cap B) = p(B) \times p_B(A)$
$p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B)$

Formule qu'on peut généraliser pour l'intersection de n événements:

Proposition

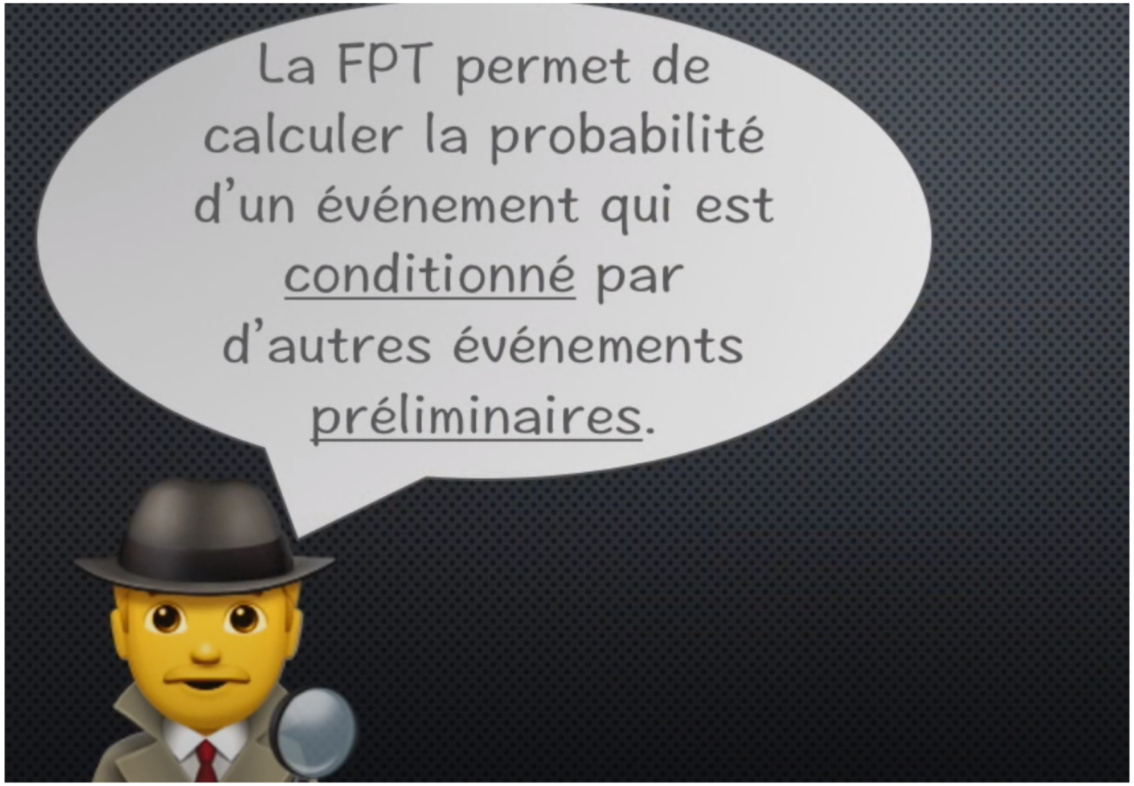
Soit $(A_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ une famille d'événements telle que :

$$p\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) \neq 0, \text{alors :}$$

$$p\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) =$$

$$p(A_1)\times p_{A_1}(A_2)\times p_{A_1\cap A_2}(A_3)\times \cdots \times p_{A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n)$$

Deuxième formule : probabilités totales



Formule des probabilités totales (1)

Soit B un événement et soit A un événement non quasi impossible ($p(A) \neq 0$) alors :

$$\boxed{\begin{array}{l} p(B) = p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B) \\ p(B) = p(A)p_A(B) + p(\overline{A})p_{\overline{A}}(B) \end{array}}$$

Formule qu'on peut généraliser:

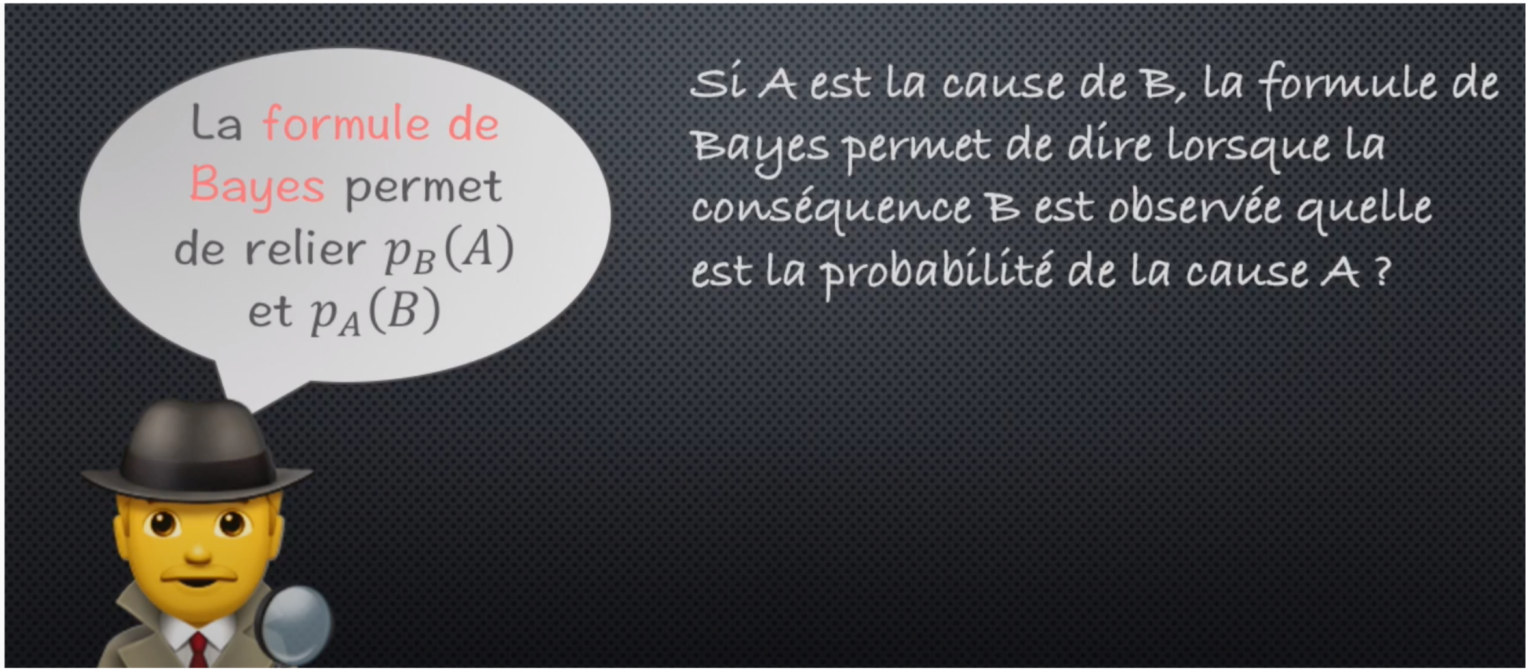
Formule des probabilités totales (2)

Soit B un événement et soit $(A_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ un SCE dont aucun événement n'est quasi impossible $(p(A_i) \neq 0)$, alors :

$$\boxed{p(B) = \sum_{i=1}^{n} p(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i)p_{A_i}(B)}$$

Troisième formule : formule de Bayes

Elle combine les 2 formules précédentes et permet de « remonter le temps » en calculent une probabilité conditionnelle inversée



Formule de Bayes

On se donne un SCE $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ alors pour tout événement B de probabilité non nulle, on a :

$$\boxed{\forall i \in [\![1;n]\!], p_B(A_i) = \frac{p_{A_i}(B) \times p(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} p(A_j) p_{A_j}(B)}}$$