Différents modes de raisonnements

- **<u>Par analyse-synthèse :</u>**

ANALYSE = UNICITÉ

SYNTHÈSE = EXISTENCE

Exemple On cherche l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ pour lesquelles pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $\quad f\big(y - f(x)\big) = 2 - x - y.$

Démonstration

- **Analyse :** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $\quad f\big(y - f(x)\big) = 2 - x - y.$ En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, si on choisit pour y la valeur $f(x)$: $\quad f(0) = 2 - x - f(x)$, donc : $f(x) = \big(2 - f(0)\big) - x.$ Ce calcul prouve que f est de la forme $x \longmapsto \lambda - x$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$.
- **Synthèse :** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Notons f la fonction $x \longmapsto \lambda - x$. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$f\big(x - f(y)\big) = f\big(x - (\lambda - y)\big) = f(x + y - \lambda) = \lambda - (x + y - \lambda) = 2\lambda - x - y.$$

Ainsi, la seule valeur de λ pour laquelle f satisfait le problème étudié est : $\quad \lambda = 1.$

Conclusion : la fonction $x \longmapsto 1 - x$ est la seule fonction du type étudié.

- **<u>Par équivalence :</u>** Il faut s'assurer que l'équivalence est vraie à chaque étape du raisonnement, il y a <u>aucune</u> hypothèse à rajouter dans un des membre de l'équivalence.

<u>Remarques :</u> des équations sont équivalentes si elles ont le même ensemble de définition $\boxed{\text{et}}$ le même ensemble de solutions

Par exemple, vous faites sans le savoir une analyse-synthèse chaque fois que vous résolvez une équation. On vous l'a dit et répété, la résolution d'une équation est toujours un double mouvement — « N'oubliez pas la réciproque ! » Tâchons de nous en convaincre sur un exemple de résolution par équivalence. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

ANALYSE : Les seules solutions possibles sont $-\sqrt{3}$, -1, 1 et $\sqrt{3}$. $\downarrow$

$$\begin{aligned} x^4 - 4x^2 + 3 = 0 &\iff \big(x^2\big)^2 - 4\big(x^2\big) + 3 = 0 \\ &\iff x^2 = 1 \quad \text{ou} \quad x^2 = 3 \quad \text{(second degré…)} \\ &\iff x \in \big\{-\sqrt{3}, -1, 1, \sqrt{3}\big\}. \end{aligned}$$

$\uparrow$ SYNTHÈSE : $-\sqrt{3}$, -1, 1 et $\sqrt{3}$ sont bel et bien solutions.

- **<u>Par double implication (ou double inclusion pour des ensembles) :</u>** pour une (in)équation, on montre que toute solution est dans un certain ensemble puis on vérifie que chaque élément de cet ensemble est bien solution.

  Exemple :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$$

Preuve : Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

Le sens indirect est évident.

Pour le sens direct, si $x^2 + y^2 = 0$ alors $x^2 = -y^2$ est à la fois positif et négatif donc nul. Puisque $x^2 = -y^2 = 0$, on a bien $x = y = 0$

- **Par disjonction de cas :** pour démontrer une proposition sur un ensemble d'objets, on la démontre sur des sous-ensembles qui peuvent être disjoints et qui par réunion recouvrent l'ensemble de départ (dont ils forment une partition s'ils sont disjoints).

- **Par l'absurde :** pour montrer qu'une proposition P est vraie on suppose par l'absurde que la proposition contraire « non P » est vraie. Par déduction on arrive à une contradiction ainsi « non P » est fausse et P est vraie.

Quantificateurs

Pour tout (∀): si la proposition est universelle (vraie quelque soit)
Il existe (∃) : si la proposition est existentielle (vraie pour au moins un élément)

Exemple: Existe-t-il un réel x tel que $\frac{1}{x^2+1} > 1$?
Soit x un réel. Les nombres $\frac{1}{x^2+1}$ et 1 étant strictement positifs on peut comparer leurs inverses. On suppose par l'absurde qu'il existe un réel x tel que $1 + x^2 < 1$ c'est impossible donc la réponse est non : pour tout réel x; $\frac{1}{x^2+1} \leq 1$

Négation

Pour P et Q des propositions : (lois de Morgan)
- la négation de « P <u>ou</u> Q » est « non P <u>et</u> non Q »
- la négation de « P <u>et</u> Q » est « non P <u>ou</u> non Q »

Exemples : Écrire le contraire des propositions suivantes :
1) « La carte est un carreau et n'est pas un roi »
2) « Je pratique l'anglais et l'espagnol »

La négation de « pour tout élément de E, P est vrai » est « il existe un élément de E qui ne vérifie pas P »
La négation de « il existe un élément de E qui vérifie P » est « pour tout élément de E, P est fausse».

<u>Remarque :</u> une proposition universelle portant sur un ensemble vide est vrai (par exemple « tous les chiens à deux têtes sont jaunes » est une proposition vraie sinon il existerait un chien à deux têtes qui n'est pas jaune… En effet le contraire de « $P \Longrightarrow Q$ » est « P et non Q » et si une proposition est fausse alors son contraire doit être vrai !)

On rappelle que les propositions : p ou q et : $(\text{non } p) \Longrightarrow q$ sont équivalentes. Ainsi, dire que de deux propositions l'une est vraie, c'est dire que si on suppose fausse l'une fixée des deux, alors c'est l'autre qui est vraie.

Quand on veut montrer que : p ou q, on procède souvent ainsi :

« Supposons p fausse.
Montrons que q est vraie. »

$\left.\vdots\quad\right\}$ Preuve de q.

Exemple $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \max\left\{x^2, (x-2)^2\right\} \geqslant 1.$

Démonstration Soit $x \in \mathbb{R}$. Il s'agit de montrer que : $x^2 \geqslant 1$ ou $(x-2)^2 \geqslant 1$. Supposons à cette fin que : $x^2 < 1$ et montrons qu'alors : $(x-2)^2 \geqslant 1$. Or dire que : $x^2 < 1$, c'est dire que : $-1 < x < 1$, donc aussitôt : $-3 < x-2 < -1$, et comme la fonction carrée est décroissante sur $\mathbb{R}_-$: $(x-2)^2 \geqslant (-1)^2 = 1$.

Remarque : Pour montrer que P⇔ Q est fausse on peut :

- montrer que P n'implique pas Q
- montrer que Q n'implique pas P
- montrer qu'il se peut que P soit vraie lorsque Q est fausse (P et non Q sont vraies)
- montrer qu'il se peut que Q soit vraie lorsque P est fausse (Q et non P sont vraies)

Rédaction

Quand on veut montrer que : $\forall x \in E, \quad \mathscr{P}(x)$, on écrit **SANS RÉFLÉCHIR** :

« Soit $x \in E$. ← Introduction de la variable x.
Montrons que $\mathscr{P}(x)$. »

$\left.\vdots\quad\right\}$ Preuve de $\mathscr{P}(x)$.

Quand on veut montrer que : $\exists\, x \in E, \quad \mathscr{P}(x)$, et qu'on a déjà en tête un exemple d'objet $x \in E$ qui a la propriété $\mathscr{P}$, on écrit **SANS RÉFLÉCHIR** :

« Posons : $x = \ldots$ ← L'exemple qu'on a en tête.
Vérifions que $\mathscr{P}(x)$. »

$\left.\vdots\quad\right\}$ Vérification que x satisfait la propriété $\mathscr{P}$.