Questions-réponses semaine 6

Q°1 Je ne comprends pas bien, dans l'exercice 4 du TD13, comment passe-t-on du fait d'avoir trouvé la limite de f en 0 au fait que f admette alors un DL d'ordre 1 en 0 ?

R°1 En écrivant un o(x^2) vous écrivez un DL à l'ordre 2. Une fonction qui admet un DL à l'ordre 2 admet un DL à l'ordre 1 car un o(x^2) est aussi un o(x) au voisinage de 0. Et une fonction qui admet un DL à l'ordre 1 est dérivable.

Avec le même raisonnement une fonction qui admet un DL à l'ordre 1 admet un DL à l'ordre 0 car un o(x) est aussi un o(1) au voisinage de 0. Et une fonction qui admet un DL à l'ordre 0 est continue. On retrouve ainsi le fait que toute fonction dérivable est continue.

Q°2 Je ne comprends pas bien pourquoi on applique, dans le corrigé de l'exercice 6 du TD 13, des développements limités au voisinage de 0 alors que l'on se trouve au voisinage de 1. On passe par exemple de 1/(1+h) à
1-h+h^2+o(h^2)...

R°2 Si x est proche de 1, on peut considérer que $x = 1 + h$ avec h proche de 0 et ainsi utiliser les DL usuels (qui sont valables en 0 uniquement).

Avec le même raisonnement, si x est proche de -1, on peut considérer que
$x = -1 + h = -(1 - h)$ avec h proche de 0 puis utiliser les DL usuels.

Q°3 Dans quelles mesures utilisons nous les symboles "appartenir à" et "inclus dans" ?
Je veux dire :
On dit qu' Ω appartient à $\mathcal{A}$ la tribu des parties de Ω, et pourtant ce sont tout les deux des ensembles....

R°3 C'est très subtil.
La relation d'inclusion s'utilise pour des objets de même nature par exemple
$[1\,;3] \subset [1;+\infty[$ ou encore $\{1\} \subset [1;3]$
La relation d'appartenance c'est pour signaler qu'un élément est dans un ensemble. Puisque l'univers est une partie de l'univers, on notera $\Omega \in \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ ou encore $1 \in [1;3]$.

Q°4 Dans la même idée, dit-on qu'un événement E appartient ou non à Oméga, ou bien dit-on qu'un événement est inclut ou non dans Oméga ?

R°4 L'univers c'est l'ensemble des possibles donc l'ensemble des événements élémentaires (constitué d'une seule issue de l'expérience).
Un événement est une partie de l'univers donc ainsi on note pour un évènement B ; $B \in \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$
On peut aussi voir un événement comme un sous ensemble de l'univers alors on notera $B \subset \Omega$.

Q°5 Peut-on dire que Ω est un élément de $\mathcal{A}$, tribu des parties de Ω ?

R°5 Oui c'est exactement ça !

Q° 6 De même est-il correct d'écrire :
E appartient à Ω qui appartient à $\mathcal{A}$ qui appartient à P(Ω) ?

R°6 Si on note $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de l'univers alors on peut écrire $\Omega \in \mathcal{A}$.
Et si on note E un événement alors $E \subset \Omega$.
On ne concaténera pas la relation d'appartenance alors qu'on peut concaténer la relation d'inclusion.

Q°7 Soit Ω l'univers
Soient A et B deux événements : $A\subset \Omega$ et $B\subset \Omega$
Si A et B sont incompatibles, peut-on dire dès lors que B appartient à la partie de Ω, "$\bar{A}$" ?

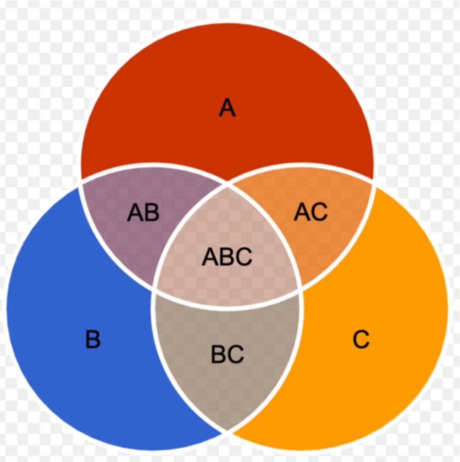
R°7 En effet si A et B sont incompatibles alors $B\subset \bar{A} \subset \Omega$

Q°8 Donc que, quelque soit A et $B \subset \Omega$, B est inclut nécessairement à "$\bar{A}$" ?

R°8 Cette proposition est fausse : A peut intersecter B si A et B ne sont pas incompatibles (regarder les illustrations ensemblistes).

Q° 9 Concernant spécifiquement l'exercice 1 du TD :
Je ne comprends pas trop la correction de l'exercice.
En effet, si on prend la première question qui nous demande d'exprimer l'événement "A seul se réalise", la réponse du corrigé nous dit : $P(A\cap \bar{B} \cap \bar{C})$
Or, j'aurai tendance à penser que la réponse P(A) seule suffirait.
En effet, il n'est pas dit dans l'énoncé que les événements A, B et C sont (ou non) disjoints.
Si tel était le cas, alors P(A) ne suffirait-il pas ?
De plus, si tel n'est pas le cas, alors A, B et C ne sont ils pas "liés", je veux dire par là que $B\subset A$ ou/et $C\subset A$?
Pouvez-vous m'éclairer sur ce point ?

R°9 Attention vous avez tendance à confondre un événement et une probabilité. Dans cet exercice, il n'est pas question de probabilités mais seulement de manipuler les notations ensemblistes. Là encore si vous faites une illustration (diagramme de Venn) avec 3 évènements contenus dans l'univers (en quadrillé sur la figure),



la question est de décrire le fait que seul A arrive mais si les événements ne sont pas disjoints alors A peut se produire en même temps que B par exemple et nous on veut seulement A.

Vous avez raison lorsque vous écrivez « si les événements étaient 2 à 2 disjoints, alors A suffit ».

Vous faites ensuite le même amalgame que dans la question 8 lorsque vous écrivez : « si A, B et C ne sont pas disjoints alors $B \subset A$ ou/et $C \subset A$?

Q°10 Pour l'exercice 3 question 3.
J'ai calculé la probabilité demandée en utilisant les combinaisons et je suis arrivé au même résultat que sur le corrigé.
Seulement, je ne sais pas si le raisonnement est correct car même si nous sommes dans un événement qui nécessite aucun ordre (étant donné que les éléments, les numéro du dé, sont identiques), je ne comprends pas pourquoi il ne nécessite aucune répétition.

R°10 Si c'est pour calculer le 6 qui est au numérateur alors on peut dire que pour choisir une face il y a $\binom{6}{1} = 6$ possibilités au premier lancer puis 1 seule possibilité au lancer numéro 2, 3, 4 et 5 soit en tout $6\times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 6$ cas favorables.
Ici il y a 5 expériences car 5 lancers de dés donc répétition possible mais comme les 5 issues doivent être les mêmes, cela revient à lancer le dé une fois.
On utilise les combinaisons s'il y a ni ordre ni répétition lorsqu'on considère une seule expérience. Ce que l'on peut faire ici.

Q°11 Je ne comprends ce que cela signifie card (P (Ω)) ?

R°11 C'est le nombre de parties (d'ensembles) que l'on peut constituer grâce aux issues de l'expérience. Par exemple pour une pièce qu'on jette on a $\Omega = \{\text{Pile}, \text{Face}\}$. Avec ces 2 issues (éléments) on peut constituer $2^2 = 4$ ensembles qui sont $\emptyset$; $\{Pile\}$; $\{\text{Face}\}$ et Ω

Q°12 J'ai vraiment du mal à trouver les cardinaux des évènements. Est-ce vous auriez une technique où il faut simplement réfléchir à l'expérience jusqu'à pouvoir compter ?

R°12 Vous pouvez matérialiser ce que vous cherchez. Par exemple si on s'intéresse aux codes à 3 chiffres, alors on cherche à remplire 3 cases : $\_ \quad \_ \quad \_$
Et pour chaque case il y a 10 choix possibles car c'est un nombre entier entre 0 et 9.
Ou alors on peut décrire les issues possibles : $[|0;9|] \times [|0;9|] \times [|0;9|]$
On sait que Card(E$\times F) = Card(E) \times Card(F)$

Q°13 Je ne comprends pas ce que signifie la définition 15 du cours, soit celle qui porte sur les permutations et les combinaisons. Je ne comprends pas ce que c'est qu'"ordre" ? Est-ce que c'est qu'il y a un ordre dans les expériences ?

R°13 Si je reprends l'exemple du code à 3 chiffres alors les nombres sont ordonnés car le code 321 n'est pas le même que le code 123. Et les répétitions sont possibles sauf si on nous impose un code avec 3 chiffres distincts. Le fait de se donner un code à 3 chiffres revient donc à prélever successivement (il y a un ordre) et avec remise (il y a répétition possible) 3 fois une boule dans une urne qui contient 10 boules numérotées de 0 à 9. Il y a $10^3 = 1000$ tirages possibles. C'est la notion de liste.
Si on prélève 3 boules simultanément alors il n'y a plus d'ordre car le tirage 123 ou 321 est le même et il n'y a pas de répétition possible : il y a donc $\binom{10}{3} = 120$ issues possibles. C'est la notion de combinaison.
Si on fait 3 tirages successifs et sans remise alors il y a un ordre mais pas de répétition possible il y a $10 \times 9 \times 8 = 720$ tirages possibles. C'est la notion d'arrangement.
Une permutation c'est le fait d'ordonner tous les éléments d'un ensemble. Si on reprend l'urne avec les 10 boules alors le fait de les ordonner revient à en prélever 10 (toutes) sans remise et il y a 10 ! possibilités.

Q° 14 Dans ce calcul :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}\Big((P_1 \cap F_2) \cup (F_1 \cap P_2)\Big)\\ &= \mathbb{P}(P_1 \cap F_2) + \mathbb{P}(F_1 \cap P_2) \quad \text{(par incompatibilité)}\\ &= \mathbb{P}(P_1)\mathbb{P}(F_2) + \mathbb{P}(F_1)\mathbb{P}(P_2) \quad \text{(par indépendance)}\\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

je ne comprends pas la deuxième étape : le "par indépendance" et je n'ai pas trouvé le passage dans le cours qui permettait d'éclairer ce calcul. Est-ce que vous pourriez me l'expliquer ?

R° 14 Dans le cadre général $P(F_1 \cap F_2) = P(F_1) \times P_{F_1}(F_2)$. Mais ici les lancers sont indépendants car le résultat du premier lancer n'influence en rien le résultat du second lancé alors $P_{F_1}(F_2) = P(F_2)$