Questions-réponses semaine 4

J'ai des questions sur le TD1 Ex.26.

Q°1 Dans la question 2 je ne comprends pas comment on fait avec le minimum et le maximum

R°1 On coupe la somme en 3 suivant la position de i par rapport à j :
Si i<j alors max(i ;j) = j ; si i>j alors max(i ;j) = i et si i=j alors max (i; j) = i
Ensuite dans la deuxième somme on change le nom de l'indice : on l'appelle j à la place i, on remarque alors que les 2 premières sommes sont égales. On finit le calcule avec une somme double.

Q°2 dans la question 4. Pourquoi on commence à j=2 dans la méthode 2 si déjà on va jusqu'à j-1 dans la deuxième somme?

R°2 Il faut remplir les 2 conditions : $1\leq i < j$ donc i est entre 1 et j-1 et j>1 donc j≥ 2 (on fait déjà cette gymnastique dans la question 2 à la ligne 3

J'ai une question sur l'exercice 2 du CB2 2013-2014
Q°3 Dans la question 3.b Je ne comprends comment on fait cette question et comment on déduit de la question a) les résultats.

R°3 puisque (y_n) est arithmétique de raison R =1, on connaît sa formule explicite : $y_n = y_0 + nR$ or $y_0 = \frac{1}{1-u_0} = \frac{1}{1-0} = 1$
Pour revenir à x_n, on utilise $y_n = \frac{1}{x_n}$ $soit$ $x_n = \frac{1}{y_n}$.

J'ai une question sur l'exercice 1 du CB2 2012-2013
Q°4 Dans la question 3.b Je ne comprends comment on fait cette question et comment on déduit de la question a) les résultats.

R°4 La notion de valeur propre n'est plus au programme de première année.
C'est l'ensemble des nombres réels λ tels que Ker(A- λI) $\neq \{0\}$. La question 3a) permet de trouver 3 valeurs distinctes pour λ et comme la matrice A est carrée de taille 3, on est sûr que ce sont les seules et alors A est diagonalisable c'est-à-dire qu'en prenant une base de $\mathbb{R}^3$ constituée des vecteurs propres (ceux qui sont dans Ker(A- I); $\mathrm{Ker}(\mathrm{A} - 3I)$; $\mathrm{Ker}(\mathrm{A} + I)$) on a une matrice diagonale car dans Ker(A- I) on a Au = u, dans Ker(A-3I) $on\ a\ Av = 3v$ et
dans Ker(A+I) on a Aw=-w.

J'ai des questions sur le problème 1 du CB2 2012-2013

Q°5 Dans la question 2. Pour les développements limités, pour justifier la continuité on a vu que si la fonction admettait un développement limité à l'ordre 1 en x_0 alors elle était dérivable en x_0 donc continue en x_0.

- Donc est-ce qu'on peut justifier juste avec la propriété ou il faut vérifier forcément avec la limite comme dans la correction?

R°5 Pour la continuité il faut s'assurer que $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$

S'il y a un DL1 alors il y a un DL0 mais il faut bien s'assurer que la constante dans le DL coïncide avec $f(x_0)$

Q°6 comme on a que des DL au voisinage de 0 ça veut dire qu'on ne pourra s'en servir pour justifier la continuité que en 0 et pas avec un autre nombre?

R°6 Oui, pour travailler au voisinage d'un autre nombre, il faut faire un changement de variable (cf question 2 de l'exercice 3 du TD13)

Q°7 En fait comment une fonction pourrait "ne pas admettre de DL"?

R°7 Toutes les fonctions régulières (infiniment dérivables) admettent un DL. Pour trouver une fonction qui n'admet pas de DL vous pouvez choisir une fonction qui n'est pas continue ou pas dérivable par exemple la fonction $x \longmapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ou $x \longmapsto |x|$ en 0

Q°8 Dans la question 4. Quand on fait le tableau de variation de f est-ce qu'on doit marquer la "double barre" de la valeur interdite pour 0 comme elle est continue en 0 finalement?

R°8 Non, il n'y a pas de double barre puisqu'on a f(0) = 1

Q°9 Dans la Partie 2, question 10.b, Je ne comprends pas trop comment on fait l'hérédité de la récurrence.

R°9 On utilise d'abord le résultat établit dans la question 10a) puis l'hypothèse de récurrence :

$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3}|u_n - \alpha| \leq \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n |u_0 - \alpha|$

Q°10 Dans la Partie 3 question 11. Si on a F(x) = φ(x) - φ(0)
avec φ une primitive de f j'ai écrit :
F'(x)= φ'(x) - φ'(0)= f(x) - f(0) = f(x) - 1
Pourquoi on a F'(x)= f(x) ?

R°10 Votre erreur vient de la dérivée : φ(0) est un nombre donc quand on dérive ça donne bien 0.

Q°11 Pour calculer les limites avec les DL, doit-on nécessairement se ramener à un DL à l'ordre 0 (comme dans le corrigé) ? Ou bien peut-on en trouver un à l'ordre que l'on veut (même si cela est plus long/compliqué, pour être sûr que tout ne s'annule pas et qu'il reste quelque chose à la fin) ?

R°11 Retenez « qui peut le plus peut le moins » : si on a un DL à l'ordre n alors on a le DL à tout ordre k pour k$\leq n$. Pour avoir une limite il faut un DL0, si vous avez un DL1 ou un DL2 c'est bon (mais vous avez peut-être travaillé pour rien)

Q°12 Plus généralement, j'ai du mal à savoir jusqu'à quel ordre aller pour faire un DL lorsque cela n'est pas indiqué dans la consigne. Y a-t-il des « astuces » pour le savoir ou des cas particuliers dans lesquels un DL à un certain ordre est nécessaire ?

R°12 Si vous voulez une limite alors un DL0 convient.
Si vous voulez justifier la dérivabilité alors un DL1 est nécessaire et suffisant.
Si vous voulez étudier une position relative entre une courbe et sa tangente alors il faut pousser le DL à l'ordre 2 ou 3
Pour un produit, vous écrivez le DL à l'ordre attendu pour chaque facteur puis vous développez en vous arrêtant à l'ordre attendu.
Pour un quotient, c'est plus compliqué, s'il y a des simplifications alors il faudra partir d'un ordre supérieur à celui qui est attendu pour le numérateur et le dénominateur.

Q°13 Dans l'exercice 6 du TD13 (question3), je ne comprends pas comment on obtient la dernière égalité.

$$f(x) - x = x^{1+\frac{1}{x}} - x = x\left(x^{1/x} - 1\right) = x\left(\exp\left(\frac{\ln(x)}{x}\right) - 1\right)$$

R°13 Pour tout réel a>0 et pour tout réel b, $a^b = e^{b\ln(a)}$. Ici $a = x$ et b $= \frac{1}{x}$ et « multiplier par l'inverse c'est diviser ».