Questions-réponses (semaine 2)

J'ai plusieurs questions sur le corrigé du DS3 :

Q°1 Dans l'exercice 1, question 3)a), comment arrivez-vous à écrire F et G sous forme de Vect?

R°1 Si on a un ensemble de combinaisons linéaires alors on reconnaît un sous espace vectoriel engendré donc un Vect. Pour F = $\{\delta x^4 + \gamma x^3 + \alpha x^2 + \gamma x + \delta, (\delta, \gamma, \alpha) \in \mathbb{R}^3\}$
$= \{\delta(x^4 + 1) + \gamma(x^3 + x) + \alpha x^2, (\delta, \gamma, \alpha) \in \mathbb{R}^3\}$
C'est l'ensemble des polynômes qui sont combinaison linéaires de $x^4 + 1;\ x^3 + x$ et de $x^2$ donc on a bien F = Vect($x^4 + 1;\ x^3 + x;\ x^2$). Je vous laisse retrouver les polynômes qui génèrent G avec la même méthode.

Q°2 Dans l'exercice 2, la partie A, je ne comprends pas le développement pour le binôme de Newton.

R°2 On a montré à la question 3(b) que CD = DC = 0 ainsi dès que k est compris entre 1 et n-1 ; le terme est nul. Il ne reste que 2 termes : celui pour k = 0 (sans facteur D car $D^0 = I_3$) et celui pour k = n (sans facteur C car $C^{n-n} = C^0 = I_3$).

Q°3 Dans la partie B de l'exercice 2, je ne comprends pas comment à partir de f(u), f(v) et f(w) vous obtenez la matrice D.

R°3 Reportez-vous au chapitre 10, définition 10 p 7 et remplacez $u_1, u_2, u_3\ par\ u, v, w$:

$$mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(u_1) & f(u_2) & \cdots & f(u_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{array}$$

Q°4 Dans la partie B de l'exercice 2 la question 5)c), je n'arrive pas bien à comprendre le résultat de $A^n$, pourquoi n'y a-t-il pas de puissance de n à P et $P^{-1}$?

R°4 On peut le démontrer par récurrence ou alors l'écrire avec des pointillés, puisque $PDP^{-1} = A$, on a pour tout entier n,

$$A^n = (PDP^{-1})^n = (PDP^{-1})(PDP^{-1})(PDP^{-1}) \dots .(PDP^{-1}) = PDD \dots DP^{-1}$$

car de proche en proche les produits en couleur $P^{-1}P = I_3$ et $I_3 D = D$.
Attention on ne peut pas « distribuer » la puissance à chaque facteur sauf si on sait que les matrices commutent (ce qui n'est pas le cas ici).

J'ai plusieurs questions sur le corrigé du DS6 de mars 2016 :

Q°1 Dans la question 1.c de l'exercice 4 du DS6 de Mars 2016, comment on en déduit le degré et le coefficient dominant de T?

R°1 On sait que le degré de Q est n+2 et que le degré de
$(X-1)(X-2)\ldots(X-(n+1))$ est n+1 car il y a n+1 facteurs de degré 1. Comme le degré d'un produit est égal à la somme des degré on a :
deg(Q) = n+1+deg(T)
Donc le degré de T est 1.
Pour avoir le coefficient dominant il suffit de faire le produit de tous les coefficients dominants. Dans $(X-1)(X-2)\ldots(X-(n+1))$ le coefficient dominant est 1 comme dans Q alors par identification le coefficient dominant de T est également 1.
Par exemple si on sait qu'il existe $a$ *et* $b$ tel que
$(X-1)(X-2)\ldots(X-(n+1))(aX+b) =$ P alors nécessairement le degré de P sera n+2 ; le coefficient dominant de P sera $a$ et la constante dans P sera le produit des constantes à gauche du signe égal soit :
(-1)(-2)…(-(n+1))b = $(-1)^{n+1}$((n+1) !)×b.

Q°2 Dans la question 3, je n'aboutis pas et je ne comprends pas trop les étapes de la correction.

R°2 On sait pas grand chose sur P simplement que Q(X) = $X^2P(X)-1$.
Si on évalue pour X = -1 il vient : Q(-1) = P(-1)- 1 d'où P(-1) = Q(-1)+1.
Or Q(X) = $(X-1)(X-2)\ldots(X-(n+1))T(X)$
$= (X-1)(X-2)\ldots(X-(n+1))$ (X + $\frac{(-1)^n}{(n+1)!}$)
On évalue pour X = -1 :
Q(-1) = $(-1-1)(-1-2)\ldots(-1-(n+1))$(-1 + $\frac{(-1)^n}{(n+1)!}$)
= (-2)(-3)….(-(n+2)) [-1 + $\frac{(-1)^n}{(n+1)!}$]
= $(-1)^{n+1}((n+2)!)$ [-1 + $\frac{(-1)^n}{(n+1)!}$]
En distribuant:
Q(-1) = $(-1)^{n+2}((n+2)!)$ + $(-1)^{2n+1}\frac{(n+2)!}{(n+1)!}$
n et n+2 ont la même parité donc $(-1)^{n+2} = (-1)^n$
2n+1 est impair donc $(-1)^{2n+1} = -1$
Et enfin $\frac{(n+2)!}{(n+1)!} = n+2$
D'où Q(-1) = $(-1)^n((n+2)!)$ – (n+2)
Puis :
P(-1) = Q(-1)+ 1 = $(-1)^n((n+2)!)$ – (n+2)+1 = $(-1)^n((n+2)!)$ – n-1
= $(-1)^n((n+2)!)$ – (n+1)

J'ai des questions sur l'exercice 3 du sujet d'entraînement au CB2 :
« prep_CB2_bis_algebre_series_corrige.pdf »

Q°1 Dans la question 2, je ne comprends pas pourquoi, parce qu'on a C1+C2=0, (1,1,0) appartient à Ker(A-I).

R°1 On confond la matrice A-I et l'application linéaire canoniquement associée f-id.
En notant C1 et C2 les 2 premières colonnes de la matrices A-I, e1= (1,1,0) et e2=(0,1,0) les 2 premiers vecteurs de la base canonique on a C1= (A-I)(e1) et C2 = (A-I)(e2) d'après la définition 10 du chapitre 10 (page 7).
Ainsi 0 = C1+C2 = (A-I)(e1)+(A-I)(e2) = (A-I)(e1+e2) par linéarité donc e1+e2= (1,1,0) est bien dans le noyau de A-I.

Q°2 Dans la question 9, je ne comprends pas la dernière équivalence.

$$M^2 = A \Longleftrightarrow M^2P = AP \Longleftrightarrow M^2P = PT \Longleftrightarrow P^{-1}M^2P = T \Longleftrightarrow (P^{-1}MP)^2 = T$$

R°2 on multiplie chaque membre de l'égalité par P à droite puis d'après la question 7(d) on peut remplacer AP par PT. On multiplie alors chaque membre de l'égalité par $P^{-1}$ à gauche or $P^{-1}$ PT = T.
Pour la dernière équivalence on remarque que :
$(P^{-1}MP)^2 = (P^{-1}MP)(P^{-1}MP) = P^{-1}M^2P$ car $PP^{-1} = I_3$.