Prop 38 p14

- Soit $(u_1, u_2, \dots, u_k)$ une famille libre de $\mathbb{R}^p$.

  Si $\exists (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$ tel que $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(u_i) = 0$

  alors par linéarité $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i \in \ker(f) = \{0\}$ car f injective

  donc $\forall 1 \leq i \leq k$, $\lambda_i = 0$ par liberté.

- Soit $(v_1, \dots, v_\ell)$ une famille génératrice de $\mathbb{R}^p$.

  f étant surjective, $\forall y \in \mathbb{R}^n$ $\exists x \in \mathbb{R}^p$ tel que $y = f(x)$

  or $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_\ell \in \mathbb{R}$ tel que $x = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i v_i$

  alors $y = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(v_i) \in \mathrm{Vect}(f(v_1), \dots, f(v_\ell))$

  donc $\mathbb{R}^n \subset \mathrm{Vect}(f(v_1), \dots, f(v_\ell))$ l'autre inclusion étant évidente on a bien $(f(v_1), \dots, f(v_\ell))$ est génératrice de $\mathbb{R}^n$.

- Découle des 2 points précédents.