Preuves du 25/01

Th 9 p6

Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$.

On a $\forall k \in \mathbb{N}^*$

$$(A-B)\sum_{j=0}^{k-1} A^j B^{k-1-j} = \sum_{j=0}^{k-1} A^{j+1} B^{k-1-j} - \sum_{j=0}^{k-1} B A^j B^{k-j-1}$$

$$= \sum_{\ell=1}^{k} A^\ell B^{k-\ell} - \sum_{j=0}^{k-1} A^j B^{k-j}$$

$$= A^k - B^k.$$

Th 10 p6

Même preuve que dans le chapitre 1

(bien préciser que A et B commutent)

Prop 12 p 7

Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$

on a d'une part $AB = (c_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$

où $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$

donc $\mathrm{Tr}(AB) = \sum_{\ell=1}^{n} c_{\ell\ell} = \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{\ell k} b_{k\ell} = \sum_{1\leq \ell,k\leq n} a_{\ell k} b_{k\ell}$

somme double

et d'autre part $BA = (d_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$

où $d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj}$

donc $\mathrm{Tr}(BA) = \sum_{\ell=1}^{n} d_{\ell\ell} = \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{\ell k} a_{k\ell}$

somme double $\longrightarrow = \sum_{1\leq \ell,k\leq n} a_{k\ell} b_{\ell k} = \sum_{1\leq k,\ell\leq n} a_{\ell k} b_{k\ell}$

$= \mathrm{Tr}(AB)$