Chap 5. Th.7 Preuve

Méthode 2 Pour montrer que $\ell_1 = \ell_2$ on peut vérifier que $\forall \varepsilon > 0 \quad |\ell_1 - \ell_2| \leq \varepsilon$.

Avec les notations du Th. 7, on considère $\varepsilon > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}$.

Comme $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell_1$, on sait que $\exists \alpha_1 > 0$ tel que si $x \in D_f$ et si $|x - x_0| \leq \alpha_1$ alors

$$|f(x) - \ell_1| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

De même comme $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell_2$, on sait que $\exists \alpha_2 > 0$ tel que si $x \in D_f$ et si $|x - x_0| \leq \alpha_2$ alors

$$|f(x) - \ell_2| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Posons $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$ et considérons $x \in D_f$ tel que $|x - x_0| \leq \alpha$

On a, avec l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} |\ell_1 - \ell_2| &= |\ell_1 - f(x) + f(x) - \ell_2| \\ &\leq |\ell_1 - f(x)| + |f(x) - \ell_2| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

CQFD

(Puisque l'écart entre ℓ_1 et ℓ_2 peut être rendu aussi petit que possible c'est qu'il est nul et donc $\ell_1 = \ell_2$)