Preuve du 07/04

## Théorème 16 p. 9

On raisonne par disjonction de cas suivant la valeur de $\alpha$

- Si $\alpha > 1$

On va comparer les sommes partielles avec une intégrale qu'on sait calculer. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc pour $k \geq 2$ elle est décroissante sur $[k-1;k]$

ainsi $\forall t \in [k-1;k]$
$$\frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{t^\alpha}$$

En intégrant (les bornes sont dans le bon ordre) :
$$\int_{k-1}^{k} \frac{1}{k^\alpha} dt \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha} dt$$

Soit $N \geq 2$. En sommant ces inégalités pour $k \in [\![2;N]\!]$ :
$$\sum_{k=2}^{N} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k^\alpha} dt \leq \sum_{k=2}^{N} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha} dt$$
$$\Leftrightarrow \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{1}^{N} \frac{1}{t^\alpha} dt \quad \text{(Chasles)}$$
$$\Leftrightarrow \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leq \left[\frac{-1}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}}\right]_1^N$$
$$\Leftrightarrow \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leq \underbrace{\frac{-1}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}}}_{<0} + \frac{1}{\alpha-1}$$
$$\leq \frac{1}{\alpha-1}$$

Les sommes partielles sont majorées et les termes de la somme sont positifs donc la série converge

- Si $\alpha = 1$ On retrouve la série harmonique, elle diverge
- Si $\alpha \in ]0;1[$ alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}$

donc par comparaison la série diverge.

- Si $\alpha \leq 0$ alors la série diverge grossièrement.