Khôlle n°2 (S1)

Question de cours

Montrer que pour tous réels *x et y* : $|x+y| \leq |x| + |y|$

Exercice 1

Résoudre les (in)équations suivantes dans $\mathbb{R}$ en prenant soin de donner d'abord l'ensemble de résolution.

$$\sqrt{x} = x - 2.$$

$$|2x-1| + |2x+1| \leq 10$$

Exercice 2

Calculer pour tout entier naturel n non nul :

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{i} \frac{k}{i}$$

Exercice 3

Démontrer par récurrence que pour tous entiers naturels n et p.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{p+k}{k} = \binom{p+n+1}{n}$$

Exercice 4 :

1) Etudier les variations de la fonction définie sur $[0;1]$ par $f(x) = x(1-x)$
2) En déduire que pour 1 $\leq$ i $\leq$ n, si on a $x_i \in [0;1]$, alors

$$\min\left(\prod_{1}^{n} x_i ; \prod_{i}^{n} (1-x_i)\right) \leq \frac{1}{2^n}$$

Khôlle n°2 (S1)

Question de cours

Énoncer et démontrer la formule de Pascal.

Exercice 1

Résoudre les (in)équations suivantes dans $\mathbb{R}$ en prenant soin de donner d'abord l'ensemble de résolution.

$$\sqrt{x-3} = -x+5.$$

$$|x-2| < |2x+1|$$

Exercice 2

Soit $x \in \,]-1\,;+\infty[$. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$(1+x)^n \geq 1+nx \qquad \textit{(Inégalité de Bernoulli)}$$

Exercice 3

Calculer $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (i+j)^2$

Khôlle n°2 (S1)

Question de cours

Énoncer et démontrer la formule du binôme de Newton.

Exercice 1

Résoudre les (in)équations suivantes dans $\mathbb{R}$; en prenant soin de donner d'abord l'ensemble de résolution.

$$\sqrt{x+3} = x - 4.$$

$$x^4 + 3x^2 + 2 = 0.$$

$$|x-2| + |2x+1| \leq 2$$

Exercice 2

Démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que :

$$\prod_{k=1}^{n}(4k-2) = \prod_{k=1}^{n}(n+k)$$

Exercice 3

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_n = \sum_{q=0}^{n}\sum_{p=0}^{q}\sum_{k=0}^{p} 2^k.$

Khôlle n°2 (S2)

Question de cours

Énoncer et démontrer la formule de Pascal.

Exercice 1

Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$; en prenant soin de donner d'abord l'ensemble de résolution.

$$(I_1) \quad : \quad |x-3| \leqslant 5-x,$$

$$(I_2) \quad : \quad x-3 \leqslant \sqrt{5-x},$$

Exercice 2

Montrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} |i-j| = \frac{n(n^2-1)}{3}$$

Exercice 3

Démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*, que$:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

Exercice 4 :

On considère l'ensemble $E=\{\frac{\cos(n)}{n}\ ;\ n \in \mathbb{N}^*\}$. Donner un majorant et un minorant de E.

Khôlle n°2 (S2)

<u>Question de cours</u>

Montrer que pour tous réels *x et y* : $||x| - |y|| \leq |x+y|$

<u>Exercice 1</u>

Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$; en prenant soin de donner d'abord l'ensemble de résolution.

$$(E_3) \quad : \quad e^{2x} + e^{-2x} = 4,$$

$$(E_4) \quad : \quad |\ln(x) - 1| + |\ln(x) + 1| = 2.$$

<u>Exercice 2</u>

Calculer pour tout entier naturel n non nul :

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} ij$$

<u>Exercice 3</u>

Démontrer par récurrence, que pour tout entier naturel supérieur ou égal à 2, on a :

$$n! < n^n.$$

813

Khôlle n°2 (S2)

Question de cours

Résolution dans $\mathbb{R}$ de $ax^2 + bx + c = 0$ où $a, b\ et\ c$ sont des réels, $a \neq 0$.

Exercice 1

Montrer que pour tout entier naturel non nul :

$$\sum_{l=1}^{n} \sum_{k=l}^{n} \frac{l}{kn} = \frac{n+3}{4}$$

Exercice 2

Montrer que pour tous entiers k et n :

$$\frac{1}{\binom{n+1}{k}} + \frac{1}{\binom{n+1}{k+1}} = \frac{n+2}{(n+1)\binom{n}{k}}$$

Exercice 3

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$; en prenant soin de donner d'abord l'ensemble de résolution.

$$(E_1) \quad : \quad 2\ln(-x) = \sqrt{\exp(6)},$$

$$(E_2) \quad : \quad \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + \ln(\sqrt{1+x^2} - x) = 0,$$