Résoudre un système à paramètres

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+6y-4z=2 \\ -3x-9y+6z=m-5 \end{cases}$$

Étape 1

On rend le système triangulaire grâce à la méthode des pivot de Gauss

⚠ on ne peut pas prendre m comme pivot car il peut être nul.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=2 \\ 4y-6z=-2 & L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \\ -6y+9z=m+1 & L_3 \leftarrow L_3+3L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=2 \\ \frac{4}{2}y-\frac{6}{2}z=-\frac{2}{2} & L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \\ -6y+9z=m+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=2 \\ 2y-3z=-1 \\ 0=m-2 & L_3 \leftarrow L_3+3L_2 \end{cases}$$

Étape 2 Après avoir résolu les système en fonction du paramètre On raisonne par disjonction de cas suivant la valeur de ce paramètre.

1er cas : si $m \neq 2$ $S=\emptyset$

2ème cas : si $m=2$

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2y-3z=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{5}{2}-\frac{5}{2}z \\ y=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}z \end{cases}$$

$$S=\left\{\left(\frac{5}{2}-\frac{5}{2}z, -\frac{1}{2}+\frac{3}{2}z, z\right) z\in\mathbb{R}\right\}$$

MÉTHODE : Passer d'une représentation paramétrique aux équations cartésiennes

Soit $A = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 2a+b \\ -a+3b \\ -b \end{pmatrix} \text{ avec } a, b \in \mathbb{R} \right\}$ et soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$

$$X \in A \iff \exists a, b \in \mathbb{R} \;/\; \begin{cases} a = x \\ 2a+b = y \\ -a+3b = z \\ -b = t \end{cases}$$

$$\iff \exists a, b \in \mathbb{R} \;/\; \begin{cases} a = x \\ b = y - 2x \\ -x + 3(y-2x) = z \\ -(y-2x) = t \end{cases}$$

on trouve a et b en fonction de x et y que l'on peut remplacer

$$\iff \begin{cases} 7x - 3y + z = 0 \\ 2x - y - t = 0 \end{cases}$$

Donc $A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;/\; 7x - 3y + z = 0 \text{ et } 2x - y - t = 0 \right\}$

on trouve bien un système d'équations cartésiennes

Ambre
Esteban
Rosanna

Montrer qu'une famille est libre.

* définition d'une famille libre :

Soit $n \geq 1$ et soient $u_1, u_2, \dots, u_k$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

On dit que $(u_1, u_2, \dots, u_k)$ est une famille libre de vecteurs si la seule combinaison linéaire nulle de $u_1, u_2, \dots u_k$ est la combinaison triviale nulle.

$\forall \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, si $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_k u_k = 0_{\mathbb{R}^n}$, alors

$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$.

* montrer qu'une famille est libre :

Soit $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$. On veut montrer que la famille (u, v) est libre.

On cherche donc à montrer qu'il existe qu'une relation linéaire nulle alors elle est triviale ....

on pose la relation linéaire nulle puis le système que l'on résout :

$$au + bv = 0 \iff \begin{cases} ax + bl = 0 \\ ay + bm = 0 \\ az + bn = 0 \end{cases} \overset{?}{\iff} \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

S'il n'existe qu'une solution au système : a et b sont nuls.

on a $0u + 0v = 0$. La famille (u, v) est libre.

Rq Avec 2 vecteurs la non colinéarité implique la liberté.

Montrer qu'une famille est libre

FRANCE Loreta
DANGELO Raphaël
MEDINA Elise

On veut savoir si la famille $(u_1, u_2 \dots u_p)$ est libre, $(u_i)_{1 \leq i \leq p} \in \mathbb{R}$.
Cela revient à montrer que la seule combinaison linéaire nulle de cette famille est triviale.

Il faut donc résoudre l'équation $\sum_{i=0}^{p} \lambda_i u_i = 0$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

$$\iff \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \dots + \lambda_p u_p = 0$$

Donc, avec $u_i = \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{pmatrix}$, cela revient à résoudre le système :

$$\begin{cases} \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_p a_p = 0 \\ \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_p b_p = 0 \\ \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \dots + \lambda_p P_P = 0 \end{cases}$$

Grâce à la méthode du pivot de Gauss, on résoud le système.

- Si la solution est <u>triviale</u> (tous les $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq p}$ sont nuls) alors la famille est <u>libre</u> = il est impossible d'exprimer un vecteur en fonction d'un autre.
- Si l'un des facteurs λ trouvés est non-nul, alors la famille est liée.

Exemple Montrer que la famille $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est libre.

- Cherchons a, b, c $\in \mathbb{R}$ tels que $a\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

$$\iff \begin{cases} 2a + b + c = 0 \\ 2a + 2b + c = 0 \\ a + 2b + c = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2a + b + c = 0 \\ -b = 0 \quad \iff L_2 = L_1 - L_2 \\ -3b - c = 0 \iff L_3 = L_1 - 2L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2a + c = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Donc la famille est libre.

Pour demontrer qu'une famille $(u_1, u_2 \dots u_n)$ est une base du sev E

On peut :

- prouver qu'elle est libre et génératrice
- prouver qu'elle est libre et si on connaît dim (E), il faut remarquer qu'elle possède le même nombre de vecteurs que la dim (E)

2 sev sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$

METHODE

. Soit F et G deux sev de $\mathbb{R}^n$

. F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$ si :

$*$ $F \cap G = \{0\}$ (i.e F et G sont en somme directe)

$*$ $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = n \iff F + G = \mathbb{R}^n$

EXEMPLE

Soit $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0 \right\}$ et $G = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ deux sev de $\mathbb{R}^3$.

• $u \in F \cap G \iff \exists a \in \mathbb{R} / \begin{cases} u = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix} \\ a + a + a = 0 \end{cases}$

$\iff \exists a \in \mathbb{R} / \begin{cases} u = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix} \\ a = 0 \end{cases}$

$\boxed{\text{Donc } F \cap G = \{0\}}$

• On a $F = \mathrm{Vect}((1,0,-1), (0,1,-1))$, donc $\dim(F) = 2$

On a donc $\dim(F) + \dim(G) = 2 + 1 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$

or $F + G \subset \mathbb{R}^3$ et $\dim(F+G) = \dim(\mathbb{R}^3)$

$\boxed{\text{donc } F + G = \mathbb{R}^3}$

• F et G sont donc supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Fiche méthode.

* Décomposition d'un vecteur $\vec{u}$ dans une base : le but est d'écrire $\vec{u}$ comme combinaison linéaire des vecteurs de la " base

- Si les vecteurs dans le "Vect" forment une base alors on applique des coefficients selon chaque vecteur de la base.
  - × On résout le système suivant cette décomposition.

- Exemple : Soit $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}\right)$

  On a la base suivante = $\begin{pmatrix}1\\0\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}$, avec $u = \begin{pmatrix}1\\0\\6\end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}$

  quel est la décomposition du vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix}9\\2\\6\end{pmatrix}$ dans cette base ?

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} a \times 1 + b \times 4 = 9 \\ a \times 0 + b \times 1 = 2 \\ a \times 6 + b \times 0 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 4b = 9 \\ b = 2 \\ 6a = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 4 \times 2 = 9 \\ b = 2 \\ a = 1 \end{cases}$$

Ainsi, $\vec{w} = 1 \times \begin{pmatrix}1\\0\\6\end{pmatrix} + 2 \times \begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix} = \vec{u} + 2\vec{v}$