Fiche méthode pour le calcul de la limite d'une suite

Prérequis : On connaît les limites usuelles

1° S'il y a une FI du type $\frac{\infty}{\infty}$ ou $-\infty+\infty$; on peut factoriser par le terme « le plus fort »

$Exemple$: $3^n - 2^n = 3^n(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n)$

2° S'il y a une FI du type $\frac{\infty}{\infty}$, on peut utiliser les équivalents usuels (au voisinage de 0 ils découlent de la limite du taux d'accroissement) puis les croissances comparées

$Exemples$: au voisinage de $+\infty$, $\frac{e^n-1}{n^2+n} \sim \frac{e^n}{n^2}$; $e^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{1}{n}$

3° On peut utiliser les théorèmes de comparaison

$Exemple$: $n^2 + \cos(n) \geq n^2 - 1$

4° On peut utiliser le théorème d'encadrement (conséquence : le produit d'une suite qui tend vers 0 et d'une suite bornée est une suite qui tend vers 0)

$Exemple$: $\frac{(-1)^n}{n}$

5° Avec des racines carrées on pense à multiplier et diviser par l'expression conjuguée pour lever l'indétermination

$Exemple$: $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

6° Si la variable n est dans l'exposant, on pense à la forme exponentielle (cf exemple E3 p 8 du chap 11)

$Exemple$: $(\frac{n-1}{n+1})^n = (1 - \frac{2}{n+1})^n = e^{n ln(1-\frac{2}{n+1})}$ or au voisinage de $+\infty$, $n\, ln(1 - \frac{2}{n+1}) \sim n(\frac{-2}{n+1}) \sim -2$ alors (th 9 chap 11) $\lim_{n\to+\infty} e^{n ln(1-\frac{2}{n+1})} = e^{-2}$

7° Si la suite est récurrente alors on cherche un point fixe de la fonction qui définit la suite

$Exemple$: Si $u_{n+1} = {u_n}^2 - 2$ alors la potentielle limite l doit vérifier $l = l^2 - 2 \Leftrightarrow l^2 - l - 2 = 0 \Leftrightarrow l = -1\ ou\ 2$ ensuite suivant les propriétés de la suite (variations, valeur de u_0 …), on peut parfois décider de la valeur de la limite.