Donc $\ln'$ est décroissante sur $]x ; x+y[$.

Ainsi $\forall t \in]x ; x+y[\quad \frac{1}{x+y} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{x}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{x+y} \leq \ln'(t) \leq \frac{1}{x}$$

La dérivée de ln étant bornée, alors d'après l'IAF :

$$\frac{(x+y-x)}{x+y} \leq \ln(x+y) - \ln(x) \leq \frac{(x+y-x)}{x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{y}{x+y} \leq \ln(x+y) - \ln(x) \leq \frac{y}{x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{y}{x+y} \leq \ln\left(\frac{x+y}{x}\right) \leq \frac{y}{x}$$

$y>0$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{x+y} \leq \frac{1}{y}\ln\left(\frac{x+y}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$$

Pour pouvoir utiliser la $2^{\text{ème}}$ forme, il faut que :

- f soit dérivable sur I
- Il faut que f' soit bornée par une constante $K>0$ càd

que $\forall t \in I \quad -K \leq f'(t) \leq K \quad \Leftrightarrow \quad |f'(t)| \leq K$

alors $\boxed{\forall x ; y \in I \quad |f(x) - f(y)| \leq K|x-y|}$

Par exemple pour justifier $|1-\cos(x)| \leq |x|$