Limites avec équivalents en 0 :

On note 4 équivalences remarquables :

(1) $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$

(2) $\ln(u) \underset{u\to 1}{\sim} u-1$ (la cousine de la 1ère).

(3) $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$

(4) $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$

Mise en pratique :

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x}$: $\ln(1+x^2) \underset{x\to 0}{\sim} x^2$ car $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ (on peut substituer)

Donc : $\dfrac{\ln(1+x^2)}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{x} = x$

Et : $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x} = \underline{0}$.

---

(2) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\ln(x-1)}{x-2}$: $u(x) = x-1$ et $\lim\limits_{x\to 2} u(x) = 1$.

Avec $\ln(u) \underset{u\to 1}{\sim} u-1$, on a : $\ln(x-1) \underset{x\to 2}{\sim} (x-1)-1$

$\iff \ln(x-1) \underset{x\to 2}{\sim} x-2$

Donc : $\dfrac{\ln(x-1)}{x-2} \underset{x\to 2}{\sim} \dfrac{x-2}{x-2} = \underline{1}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{e^x - 1} :$$

On sait que : $\sqrt{1+x} - 1 = (1+x)^{1/2} - 1$

4 Et : $(1+x)^{1/2} - 1 \underset{x \to 0}{\sim} \frac{1}{2}x$

3 De plus : $e^x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} x$.

Donc : $\frac{\sqrt{1+x} - 1}{e^x - 1} \underset{x \to 0}{\sim} \frac{\frac{1}{2}x}{x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{x} = \frac{1}{2}$.

Ainsi : $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{e^x - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.