Comment justifier une inégalité ?

* Pour justifier une inégalité, on peut se ramener à l'étude d'une fonction intermédiaire. Pour cela, on pose une fonction égale à la différence des deux membres de l'inégalité (avec l'ensemble de définition correspondant), on dérive cette fonction pour étudier le signe de la dérivée, on en déduit ensuite les variations de la fonction intermédiaire.
En étudiant ses limites aux bornes de l'ensemble de définition et le(s) éventuel(s) maximum / minimum, on obtient son signe sur l'intervalle initialement choisi.

Exemple : Démontrer que : $\forall x \in]0, +\infty[, \ \ln(x) \leq x - 1$.

On pose une fonction intermédiaire →

Soit $g : \left| \begin{array}{l}]0, +\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(x) - (x-1) \end{array} \right.$

g est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que différence de fonctions dérivables sur cet intervalle.

On la dérive →

On a : $\forall x \in]0, +\infty[$,

$$g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

Or $g'(x) \geq 0 \iff x \in]0, 1]$

Donc g' est positive sur $]0,1]$, négative sur $[1, +\infty[$.

Donc g est croissante sur $]0,1]$, décroissante sur $[1, +\infty[$.

On obtient ses variations puis son signe sur l'intervalle choisi →

La fonction g admet donc un maximum en $x = 1$.

Or $g(1) = \ln(1) - 1 + 1$
$= 0$

Donc : $\forall x \in]0, +\infty[, \ g(x) \leq g(1) = 0$

$\iff \forall x \in]0, +\infty[, \ \ln(x) \leq x - 1$.

On se ramène ensuite à son expression pour obtenir l'inégalité souhaitée →