Corrigé :

Problème A

1. (a) On a d'une part
$$\left(e^{i\theta}\right)^2 = e^{2i\theta} = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta)$$
et d'autre part
$$\left(e^{i\theta}\right)^2 = (\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\cos\theta\sin\theta$$
Ainsi, $\Re\left(\left(e^{i\theta}\right)^2\right) = \cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ car $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.
Et, $\Im\left(\left(e^{i\theta}\right)^2\right) = \sin(2\theta) = 2\cos\theta\sin\theta$.

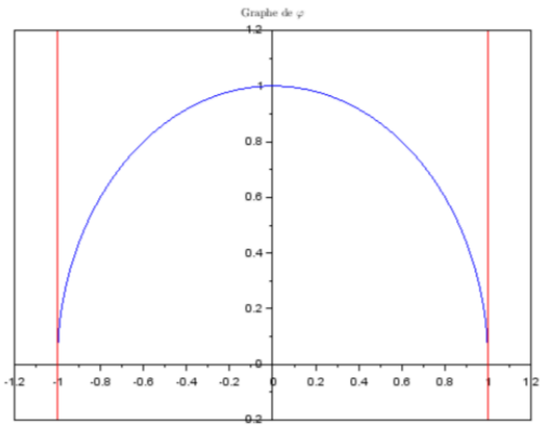
   (b) De $2\cos^2\theta - 1 = \cos(2\theta)$, on en déduit que $\cos^2(\theta) = \frac{\cos(2\theta)+1}{2}$.

2. (a) φ est bien définie en x si $1 - x^2 \geq 0$ c'est-à-dire $|x| \leq 1$. Ainsi, le domaine de définition de φ est $[-1, 1]$.

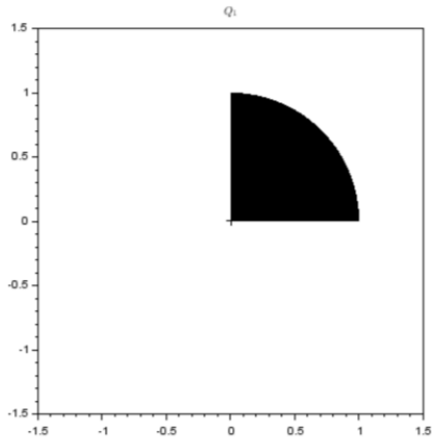
   (b) Soit $x \in [-1, 1]$, on a $\varphi(x) = \varphi(-x)$ donc le graphe de φ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

   (c) $x \mapsto 1 - x^2$ est dérivable sur $]-1, 1[$ et l'image de $]-1, 1[$ par cette fonction est $]0, 1]$. Or $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0, 1]$ donc par composition de fonctions dérivables, φ est dérivable sur $]-1, 1[$.
Soit $x \in]-1, 1[$, on a $\varphi'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$. Comme $\sqrt{1-x^2}$ tend vers 0 en restant positif lorsque x tend vers -1, $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers -1. On a ainsi :
$$\lim_{x \to -1} \varphi'(x) = +\infty$$

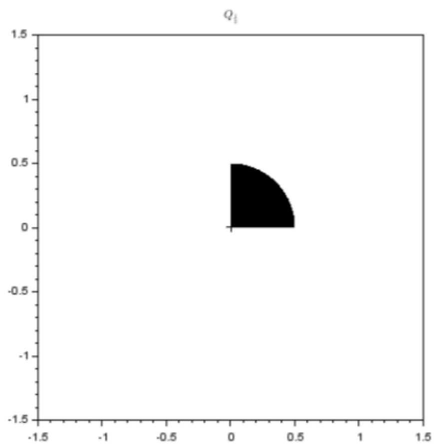
   (d) Le graphe de φ



3. (a) Voici Q_1



et voici Q_2



(b) On remarque que Q_1 est le quart de disque de centre $(0,0)$ et de rayon 1. Ce quart de disque est inclus dans $[0,1]^2$ donc $\mathbb{P}(X,Y \in Q_1)$ est égal à l'aire de Q_1 qui est $\frac{\pi}{4}$.

(c) L'aire de l'ensemble $Q_1 \cap [0,t] \times [0,1]$ correspond à l'aire sous la courbe vérifiant l'équation $y^2+x^2=1$ et $x \in [0,t], y \in [0,1]$. Or si $y^2+x^2=1$, alors comme $y \geq 0$, $y=\sqrt{1-x^2}$. L'aire de cet ensemble est donc l'intégrale de φ entre 0 et t. Comme la probabilité est donnée par l'aire de l'ensemble :

$$\mathbb{P}((X,Y) \in Q_1 \text{ et } 0 \leq X \leq t) = \int_0^t \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x.$$

(d) On effectue le changement de variable $x=\sin(\theta)$ (valide car sin est $\mathcal{C}^1$), on a $\mathrm{d}x = \cos\theta \mathrm{d}\theta$, on choisit 0 comme antécédent de 0 par sin et $\frac{\pi}{6}$ comme antécédent de $\frac{1}{2}$ par sin (le choix des antécédents n'importe pas). On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left((X,Y)\in Q_1 \text{ et } 0\leq X\leq \frac{1}{2}\right) &= \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x \qquad \text{d'après la question précédente}\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta\mathrm{d}\theta\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta \qquad \text{car } \cos\theta\geq 0, \forall\theta\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right]\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos(2\theta)+1}{2}\mathrm{d}\theta \qquad \text{d'après 1.(b)}\\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2\theta)}{2}+\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}}\\
&= \frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{\pi}{12}
\end{aligned}$$

(e) Comme X suit une loi uniforme sur $[0,1]$, $\mathbb{P}\left(0\leq X\leq \frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$.
Or $\mathbb{P}\left((X,Y)\in Q_1\cap 0\leq X\leq \frac{1}{2}\right)\neq \mathbb{P}((X,Y)\in Q_1)\mathbb{P}\left(0\leq X\leq \frac{1}{2}\right)$, donc les événements $[(X,Y)\in Q_1]$ et $\left[0\leq X\leq \frac{1}{2}\right]$ ne sont pas indépendants.

4. (a) Comme il y a une racine carré, $D(\Omega)\subset\mathbb{R}_+$. Comme X et Y sont majorées par 1, $X^2+Y^2\leq 2$ et donc $D\leq\sqrt{2}$ presque-sûrement. Ainsi $D(\Omega)=[0,\sqrt{2}]$.

(b) D'après la question précédente $F_D(t)=0$ si et seulement si $t\leq 0$, $F_D(t)=1$ si et seulement si $t\geq\sqrt{2}$.

(c) On effectue le changement de variable $x=tu$, qui est bien de classe $\mathcal{C}^1$. On a ainsi $\mathrm{d}x=t\mathrm{d}u$, lorsque $x=0$, $u=0$ et lorsque $x=t$, $u=1$.

$$\begin{aligned}
I(t) &= \int_0^t \sqrt{t^2-x^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{t^2-t^2u^2}t\mathrm{d}u\\
&= \int_0^1 t^2\sqrt{1-u^2}\mathrm{d}u \qquad \text{car } t\geq 0\\
&= t^2 I(1)
\end{aligned}$$

(d) Soit $t\in[0,1]$, $F_D(t)=\mathbb{P}(D\leq t)=\mathbb{P}((X,Y)\in Q_t)$. Or par un raisonnement analogue à la question 3.(c), on remarque que l'aire de Q_t correspond à l'aire sous la courbe d'équation $y^2+x^2=t^2$ avec $x\in[0,t]$, $y\in[0,t]$ (car si $x>t$, $y^2+x^2>t^2$, de même pour y). On obtient ainsi la courbe d'équation $y=\sqrt{t^2-x^2}$ (car $y\geq 0$) avec $x\in[0,t]$. On en déduit que

$$F_D(t)=I(t)=t^2I(1)=\frac{\pi t^2}{4}$$

(e) Pour $t>1$, il faut considérer l'aire de l'intersection de Q_t avec $[0,1]^2$ pour le calcul de $\mathbb{P}(D\leq t)$. Il n'y avait pas ce problème pour $t\leq 1$, car si $t\leq 1$, $Q_t\subset[0,1]^2$.

(f) Pour $t>1$, on a $F_D(t)=\displaystyle\int_0^1 \min(1,\sqrt{t^2-x^2})\mathrm{d}x$, car $F_D(t)$ est égal à l'aire de l'intersection de Q_t avec $[0,1]^2$.

(g) La fonction de répartition de la loi uniforme sur $[0,\sqrt{2}]$ est $t\mapsto\frac{t}{\sqrt{2}}$, en 1 elle vaut $\frac{1}{\sqrt{2}}\neq F_D(1)=\frac{\pi}{4}$. Donc D ne suit pas une loi uniforme.