HKBL 2020-2021

Devoir maison n°8

Pour le 03 mars

Traiter un exercice au choix :

Exercice 1 : Suite de l'exercice 3 du DS2

2. On souhaite maintenant déterminer l'ensemble $\mathcal{C}$ des matrices M qui commutent avec A, c'est-à-dire telles que $AM = MA$. Pour cela, on considère d'abord $\mathcal{C}'$ l'ensemble des matrices qui commutent avec T.
   (a) Traduire le fait que la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ commute avec T sous forme d'un système d'équations linéaires d'inconnues a, b, c et d.
   (b) En déduire que : $\mathcal{C}' = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix},\ a, b \in \mathbb{R} \right\}$.
   (c) Montrer que pour toute matrice $K \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,
   $$K \in \mathcal{C} \iff P^{-1}KP \in \mathcal{C}'$$
   (d) En déduire toutes les matrices de $\mathcal{C}$ et montrer qu'elles s'expriment toutes comme combinaisons linéaires de deux matrices que l'on précisera.

Exercice 2 :

On désigne par $\mathbb{E}$ l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et par $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ la base canonique de $\mathbb{E}$. On considère $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E})$ dont la matrice est $M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que l'endomorphisme f est bijectif et donner la matrice de f^{-1}. Que remarque-t-on ?
2. Montrer que l'ensemble $\mathcal{D}$ des vecteurs $\overrightarrow{u}$ de $\mathbb{E}$ tels que $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$ est un sev de $\mathbb{E}$. En donner une base.
3. Montrer que l'ensemble $\mathcal{P}$ des vecteurs $\overrightarrow{u}$ de $\mathbb{E}$ tels que $f(\overrightarrow{u}) = -\overrightarrow{u}$ est un sev de $\mathbb{E}$. En donner une équation cartésienne.
4. On pose $\mathcal{Q} = \{(x, y, z) \in \mathbb{E};\ y + z = 0\}$. Montrer que $f(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}$.

Corrigé du devoir maison n°8

Exercice 1 :

2. (a) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors :

$$MT = TM \iff \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{cases} a = a+c \\ a+b = b+d \\ c = c \\ c+d = d \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} c = 0 \\ a = d \end{cases}$$

(b) D'après la question précédente, on a donc :

$$\mathcal{C}' = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ / \ a = d \text{ et } c = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix},\ a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

(c) Soit $K \in M_2(\mathbb{R})$.

K ∈ *C* ⟺ AK = KA

En multipliant à gauche par P^{-1} et à droite par P. On a

K ∈ *C* ⟺ $TP^{-1}KP = P^{-1}\,K\,PT \iff P^{-1}\,K\,P$ commute avec T⟺ $P^{-1}\,K\,P \in$ *C '*

(d) K ∈ *C* ⟺ il existe a, b ∈ ℝ tel que $P^{-1}KP = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$

$$\iff K = P \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} P^{-1}$$
$$\iff K = \begin{pmatrix} a+6b & -4b \\ 9b & a-6b \end{pmatrix}$$

Ainsi, toutes les matrices qui commutent avec A sont celles qui s'expriment comme une combinaison linéaire de I_2 et de $\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}$.

Remarque : *C* est le sous espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$ engendré par I_2 et $\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}$, il est de dimension 2.

Exercice 2 :

1. Méthode 1 : Montrons que f est injectif c'est-à-dire ker(f)={0}. Cela suffit car f est un endomorphisme donc il est bijectif si et seulement s'il est injectif (attention cette méthode ne permet pas de déterminer la matrice de f^{-1}) …

   Méthode 2 : Montrons que f est surjectif c'est-à-dire rg(f)=3. Cela suffit car f est un endomorphisme donc il est bijectif si et seulement s'il est surjectif (attention cette méthode ne permet pas de déterminer la matrice de f^{-1}) …

   Méthode 3 : Montrons que 3M est inversible et calculons son inverse (ce sera la matrice de $(3f)^{-1} = \frac{1}{3}f^{-1}$):

   1ère façon : Soit X= $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et Y = $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

On rappelle que $A = PTP^{-1}$ ainsi K ∈ *C* ⟺ $PTP^{-1}K = K\,PTP^{-1}$

On a 3MX = Y ↔ $\begin{cases} -x+2y-2z = a \\ 2x-y-2z = b \\ -2x-2y-z = c \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} -x+2y-2z = a \\ 3y-6z = b+2a \\ -6z+3z = c-2a \end{cases}$ $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$; $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$

$$\leftrightarrow \begin{cases} -x+2y-2z = a \\ 3y-6z = b+2a \\ -27z = 6a+6b+3c \end{cases} \quad L_3 \leftarrow 3L_3 + 6L_1 \leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{9}(-a+2b-2c) \\ y = \dfrac{1}{9}(2a-b-2c) \\ z = \dfrac{1}{-9}(2a+2b+c) \end{cases}$$

Ainsi $(3M)^{-1} = \frac{1}{3}M^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ d'où $M^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} = M$

2ème façon : Méthode de Gauss Jordan : On fait des opérations sur les lignes de 3M jusqu'à obtenir l'identité et on fait les mêmes opérations sur I_3.

Méthode 4 : **La plus rapide :** On a $M^2 = I_3$ donc M est inversible et $M^{-1} = M$. f est une symétrie.

2. Méthode 1 : D = $\{u \in \mathbb{R}^3 / f(u) = u\} = \{u \in \mathbb{R}^3 / f(u) - u = 0\} = \ker\,(f - id_{\mathbb{R}^3})$ est le noyau de l'application linéaire $f - id_{\mathbb{R}^3}$ donc c'est bien un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Méthode 2 :

- On a bien D $\subset \mathbb{R}^3$
- On montre que D n'est pas vide car $f(0)$ = 0 donc 0 $\in D$.
- Pour u, v $\in D$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on montre que λ u+ v $\in D$ pour cela on calcule $f(\lambda$ u+ v)= $\lambda\, f$(u)+ f(v)= λ u+ v CQFD.

La matrice canoniquement associée à l'application linéaire $f - id_{\mathbb{R}^3}$ est M$-I_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & -2 \\ -2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$

Le noyau de $f - id_{\mathbb{R}^3}$ est l'ensemble des vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\begin{cases} -4x + 2y - 2z = 0 \\ 2x - 4y - 2z = 0 \\ -2x - 2y - 4z = 0 \end{cases} \leftrightarrow_{\substack{L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1}} \begin{cases} -4x + 2y - 2z = 0 \\ -6y - 6z = 0 \\ -6y - 6z = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = -z \\ y = -z \end{cases}$$

Ker$(f - id_{\mathbb{R}^3}) = Vect(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix})$. Une base de D est le vecteur $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. D est une droite de $\mathbb{R}^3$.

3. De même P = ker$(f + id_{\mathbb{R}^3})$ est un sev de $\mathbb{R}^3$ en tant que noyau d'une application linéaire.

La matrice canoniquement associée à l'application linéaire $f + id_{\mathbb{R}^3}$ est M$+I_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

Le noyau de $f + id_{\mathbb{R}^3}$est l'ensemble des vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$tels que $\begin{cases} 2x + 2y - 2z = 0 \\ 2x + 2y - 2z = 0 \\ -2x - 2y + 2z = 0 \end{cases} \leftrightarrow_{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}} \begin{cases} 2x + 2y - 2z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$

Une équation cartésienne de P est $2x + 2y - 2z = 0$. P est un plan de $\mathbb{R}^3$.

Remarque : f est la symétrie par rapport à D parallèlement à P. D'après l'exercice 14 du TD9, D et P sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$. Dans une base de $\mathbb{R}^3$ composée de $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et de 2 vecteurs générateurs de P, f a pour matrice : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

4. On nous donne une équation cartésienne donc Q est un plan généré par les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ par exemple. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires donc $(\vec{u}; \vec{v})$ est une base de Q.

On sait que $f(Q) = Vect(f(\vec{u}); f(\vec{v}))$= Vect($\begin{pmatrix} \frac{-4}{3} \\ \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$)$\subset$Q. De plus $f(\vec{u})$ et $f(\vec{v})$ ne sont pas colinéaires donc une base de $f(Q)$ est $(f(\vec{u})\,; f(\vec{v}))$. $f(Q)$ est donc un sev de dimension 2 contenu dans Q qui est lui-même de dimension 2 donc $f(Q) = Q$.